JORNADAS VIRTUALES
en el
Instituto Superior del Profesorado
Dr. Joaquín V. González

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
Secretaría de Educación

TRABAJO MONOGRÁFICO FINAL:

"GEOMETRÍA DINÁMICA: UNA PROPUESTA RENOVADA PARA LA ENSEÑANZA DE LUGARES GEOMÉTRICOS"

"Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto, y pensar lo que nadie más ha pensado. Lo importante es no dejar de hacerse preguntas".

Albert Szent-Györgi (1893-1986)

Autores: Gómez, Natalia; Parada, Daniela; Romero, Vanesa.
Materia: Computación – Matemática 2°B – Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
Docente: Lic. Rosa Cicala

14/07/2008

ÍNDICE:

INTRODUCCIÓN:

A lo largo del presente trabajo queremos investigar cuál es el dominio de aplicación de herramientas informáticas en la enseñanza de la matemática. No sólo analizar desde una óptica general sino, específicamente dedicando el enfoque al lugar geométrico como elemento a introducir en una clase de escuela media. Para ello sabemos que se necesitará analizar no sólo la viabilidad de la propuesta sino sus formas de introducción y aplicación, con el fin de obtener los mejores resultados a nivel calidad de educación y apropiación de saberes. Hipótesis, conclusiones, objetivos propuestos por el grupo son elementos fundamentales para comprender la problemática de la enseñanza de geometría y de la poca renovación de formas didácticas en la escuela. Cada una de ellas será puntillosamente revisada junto al soporte teórico que aquí se propone.

En conclusión, el presente trabajo no sólo será testigo de lo que programas como el Cabri Geómetra II Plus propone al alumno y docente sino que se encargará de indagar acerca de las técnicas más precisas para hacer de su uso, un uso escolar exitoso en término de educación y este grupo de trabajo se propone investigarlas y transmitirlas.

HIPÓTESIS PRIMERAS:

Al inicio del trabajo se plantearon una serie de supuestos que aquí expondremos. La intención es, a lo largo del desarrollo, hallar los mecanismos y respuestas a mucha de esas preguntas, tanto como confirmación así como refutación.

Entonces nos preguntamos:

¿Qué incidencia tienen las nuevas tecnologías como respuestas a los problemas del proceso escolar actual?

¿Es la traba de la enseñanza de la geometría en escuela media, los recursos económicos con que cuenta la institución escolar o es una problemática de los profesorados que no proveen de herramientas a los docentes para enfrentar la enseñanza de dichos contenidos?

¿Están los docentes preparados para usar herramientas informáticas en la clase? En particular, tomando el Cabri como programa a investigar, ¿resulta una herramienta útil para la enseñanza de conceptos y entes geométricos?

¿Por qué no se enseña lugar geométrico para explicar ciertos contenidos? ¿Está, la matemática de la escuela media, contemplando estas nociones de Geometría plana o han quedado olvidados en el tiempo?

Ya hemos formalizado la problemática en cuestión que trataremos. Ahora, nos proponemos entrar en el tema a desarrollar y profundizar todas las ideas planteadas.

FUNDAMENTOS DEL TEMA ELEGIDO: "LUGAR GEOMÉTRICO"

Haciendo un poco de historia: Este apartado fue diseñado por el grupo con la intención de darle profundidad a los conceptos a tratar. Consideramos que iniciar el trabajo sin hacer una revisión histórica de los conceptos matemáticos elegidos y más aún, analizar el surgimiento del Cabri Geómetra sería quitarle al lector una parte fundamental para la comprensión de la problemática planteada.

- ¿Qué es el Cabri-Geómetra? Compartamos su historia.

El Cabri no puede ser definido sólo como una herramienta informática, didáctica que trabaja con Geometría, sino que debe ser definido por lo que esencialmente es, y esto es realmente mucho más que un simple software.

En palabras de la Licenciada en Enseñanza de la Matemática Irma Elena Saiz y la Profesora Nelci Noemí Acuña, *"Cabri-Geómetra es un paquete de cómputo de geometría dinámica interactiva en tiempo real. Permite hacer la geometría de una manera muy particular: el usuario puede animar una figura desplazándola o deformándola y el resultado se presentará inmediatamente en la pantalla de la computadora. Esta libertad de movimiento permite rebasar los límites impuestos por el papel y el lápiz de la geometría tradicional. Es un medio de trabajo donde el estudiante tiene la posibilidad de experimentar con una materialización de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, de tal forma que los estudiantes puedan vivir un tipo de experimentación matemática que no es posible tener de otra forma."*

Destacamos en esta impecable definición la idea de libertad que las autoras introducen a la definición de Cabri. Es una sencilla herramienta que proporciona al alumno la libertad de interactuar con la geometría sin ningún impedimento. Abre la posibilidad de experimentación, permite al alumno construir nuevos conceptos a partir del error y más aún, permite formalizar, demostrar, inferir, que el mismo alumno por su cuenta erradique primeros conceptos que sin la experimentación no alcanzaría a comprender.

Los alumnos son libres de probar todos los caminos que le surjan, sin quedar supeditados a la linealidad del lápiz y el papel, para resolver cualquier tarea que el docente le proporcione. En este sentido, es algo muy interesante lo que el Cabri ofrece al docente: la posibilidad de ver cómo los alumnos fueron construyendo la tarea asignada, como elaboraron los conceptos para así hacer un seguimiento de su evolución y ver si realmente el alumno comprendió la consigna planteada.

Es una herramienta más que útil para crear lo que decidimos llamar "Talleres de Geometría Plana". Más adelante hablaremos sobre esta idea que surgió en el grupo y de cómo llevar a cabo la introducción del lugar geométrico en dichos talleres.

- El Cabrí y su historia

Alrededor de mediados de los años 80, se pensó en crear un paquete que permitiera crear, modificar y manipular figuras geométricas en tiempo real; Cabrí-Geómetra fue desarrollado por el investigador Jean-Marie Laborde, y contó con la colaboración de su tesista Frank Bellemain. Su antecesor el Cabrí-Graph había fallado en algunas de estas mejoras que hace el Cabri-Geómetra.

Siguiendo la postura de las autoras previamente citadas decimos que *"Actualmente, en la Argentina, existe un interés creciente por retomar los contenidos de la geometría en todos los niveles educativos. Para poner al día la práctica educativa debemos incluir esfuerzos por incorporar nuevas tecnologías en el salón de clase, con docentes informados y preparados para adaptar sus experiencias al trabajo con la computadora, donde los educandos sean participantes activos y constructivos, con recursos informáticos que permitan crear modelos, investigar y probar conjeturas acerca de distintos fenómenos (...)"*

Investigando esta línea de pensamiento averiguamos que los CBC expresan al respecto para el eje de geometría: *(...) la computadora, tanto como la fotografía, el retroproyector y la fotocopiadora, pueden dar al alumno/a ricas experiencias acerca del desarrollo de habilidades espaciales y de la exploración de conceptos geométricos (perspectiva, proyecciones, transformaciones del plano y del espacio, etc.), pero no deben sustituir nunca completamente la experiencia directa con objetos materiales, el dibujo, las construcciones y el uso de los instrumentos de geometría.*

- Historia de la Geometría

El nacimiento de la geometría surgió con la necesidad de medir; pronto en civilizaciones como la Babilónica se vio la necesidad de representar gráficamente aquello que se media, con lo que aparecieron las figuras geométricas. A estas figuras elementales: punto, recta, recintos cerrados... se le fueron descubriendo propiedades y así la geometría tomó cuerpo de Ciencia.

Egipcios y griegos, como buenos geómetras, se fundamentaron en la geometría para levantar impresionantes construcciones. Hoy en día la importancia de esta Ciencia no se discute para disciplinas prácticas como la ingeniería, la arquitectura, el diseño, etc.

El profesor Ángel Núñez, hace una reflexión al respecto que nos parece muy interesante destacar y afirma que *"A pesar de la consolidación de la Geometría como ciencia, hay algo que es preocupante, en las enseñanzas primaria y secundaria, ya cada vez se le resta importancia en favor del Cálculo y el Álgebra. Las nuevas tecnologías nos ofrecen la oportunidad de su utilización para refuerzo de la geometría en estos niveles educativos. Como ejemplo, el programa CABRI-GÉOMÈTRE (® Texas Instruments) puede sernos útil en este empeño."*

- Reseña histórica sobre lugares geométricos[1]:

Tras una ardua investigación sobre el tema conseguimos completa información histórica de los lugares geométricos. Lo más interesante de este apartado, superior a la historicidad del concepto en sí, es el planteo de problemas relativos a dichos lugares, problemas que han sido trabajados por los geómetras más conocidos de las distintas épocas y que dan cuenta de la evolución del pensamiento humano.

En la actualidad, el término lugar geométrico casi ha desaparecido de la jerga disciplinar, como ya estuvimos exponiendo. Por ejemplo, en lugar de definir la mediatriz de un segmento como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento, se suele decir que es el conjunto de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

[1] En este apartado en particular no incluimos gráficos realizados con el Cabrí Geómetra puesto que los que exponemos corresponden a los primeros trazados de lugares geométricos y tienen un valor histórico que ningún software educativo, consideramos, puede suplantar.

Ahora bien para poder saber diferenciar bien en que momento se debe hablar de un lugar geométrico o de un conjunto nos debemos referir al desarrollo histórico de la disciplina.

Los lugares geométricos fueron estudiados y concebidos como tales mucho antes de existir la noción de conjunto. Los usamos para poner el énfasis en una mirada geométrica, en una representación del objeto que viene dictada por relaciones geométricas. El uso de uno u otro término tiene algunas sutiles diferencias. A nadie se le ocurriría hablar de un lugar geométrico cuando el conjunto de puntos es vacío; posiblemente tampoco cuando, por ejemplo, la curva no es continua -la palabra lugar es singular, se refiere a un lugar, no a dos o más. Tampoco para describir curvas, superficies o cuerpos si no existen propiedades geométricas sencillas que los caractericen.

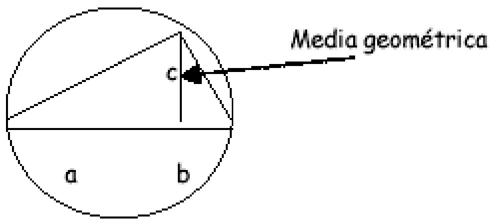
La recta y la circunferencia son los lugares geométricos que más aparecen en las civilizaciones antiguas, como Egipto y Babilonia. Esto está asociado con las formas aparentes que se asocian al sol y a la luna. El historiador griego Herodoto (-484/-420) cuenta que, como el Nilo se desbordaba todos los años borrando los límites de los campos, era necesario remarcar los perímetros. Aparecen así los "tensadores de cuerdas" que, ya familiarizados con las ternas pitagóricas, las utilizaban para trazar ángulos rectos.

Hay que esperar hasta la llamada "época heroica" de los griegos (S VI a.C.- S III a.C.) para que aparezcan nuevos lugares geométricos. La geometría se concibe entonces como una ciencia, no sólo aplicada, sino con una metodología propia para el estudio de magnitudes continuas. Es un momento floreciente, sobre todo en Atenas (especialmente bajo el gobierno de Pericles), que cuenta entre sus filósofos con personajes como Demócrito, Sócrates, Aristóteles y Platón. Se practica más la filosofía que la ciencia, y la matemática se desarrolla en su carácter formal. En esta época surgen los problemas conocidos como problemas clásicos de los griegos, a saber:

- La trisección del ángulo (dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales),
- La cuadratura del círculo (construir un cuadrado con la misma área que un círculo dado)
- La duplicación del cubo (construir un cubo con el doble de volumen que un cubo dado).

De los dos primeros no se conoce el origen, el tercero se asocia con una peste desatada en Atenas en el año 429 a.C., a causa de la cual probablemente murió Pericles. Dice la leyenda que los atenienses consultaron el oráculo de Delos para saber cómo erradicar la peste, y la respuesta fue que construyeran un altar el doble de grande (parece que construyeron uno con el doble de arista, resultando con 8 veces el volumen).

En esa época ya se sabía que la media geométrica de dos segmentos era la altura del triángulo rectángulo construido sobre la suma de los segmentos, con extremo en la circunferencia que la tiene como diámetro, sobre el punto de unión de ambos.



Para ver esto, basta con utilizar que los dos triángulos determinados por la altura "c" son semejantes, de donde a/c=c/b. Los geómetras buscan entonces dos medios proporcionales entre a y b, es decir, segmentos x e y tales que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Menecmo encuentra los dos medios proporcionales como intersección de dos parábolas (trabajando con el cono recto) y aquí volvemos a incluir la idea de lugar geométrico.

Entre todos los estudiosos que ya hemos mencionado, destacamos la aparición del estelar Euclides (S III a.C.), autor de "Los Elementos", obra que recopila el saber matemático del momento, y que fue fuente de estudio por casi 2000 años. Euclides no incluye el estudio de las cónicas en sus Elementos, por considerarlo "tema de la matemática superior". Trabaja lugares geométricos como circunferencia, mediatriz, bisectriz y arco capaz.

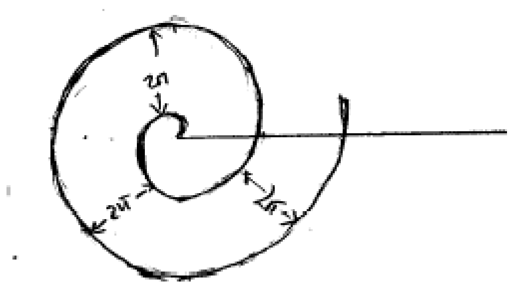
Los griegos clasifican los lugares geométricos en tres tipos, y esta clasificación se utiliza hasta mediados del siglo XVII:

- Los llamados lugares planos: rectas y circunferencias, resultando problemas planos los que pueden resolverse con regla y compás.

- Los lugares lineales: son otras curvas, por ejemplo las espirales, que resuelven los problemas lineales.

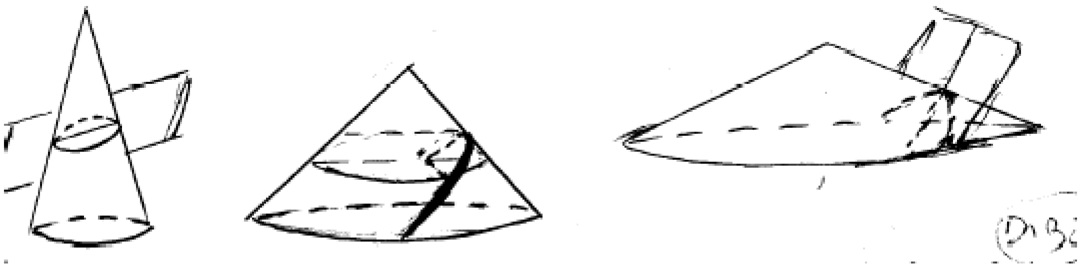
- Los lugares sólidos que incluyen a las cónicas, siendo los problemas sólidos los que necesitan de éstas para su resolución.

Otro personaje clave es el de Arquímedes quien nace aproximadamente en el año 287 a.C. en Siracusa. Éste construye diferentes máquinas que ayudan a la ciudad a resistir el sitio de los romanos durante la segunda guerra púnica (catapultas para arrojar piedras, espejos que utilizan el sol para incendiar los barcos, etc.). Encuentra métodos generales para calcular áreas de figuras curvilíneas y volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas. Descubre varias curvas, entre ellas la que se conoce como espiral de Arquímedes[2] o espiral uniforme.



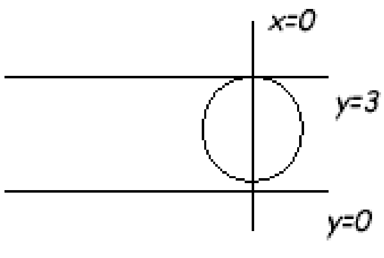
Aproximadamente medio siglo después de Arquímedes, Apolonio (nacido en Perga, hoy Turquía), llamado el gran geómetra, estudia las cónicas. Menecmo ya había obtenido la parábola, la hipérbola y la elipse cortando conos de diferentes ángulos, con planos perpendiculares a su generatriz. Él llamaba *oxitoma*- sección del cono agudo - a la elipse; *ortotoma* - sección del cono recto - a la parábola; y *amblitoma* -sección del cono obtuso - a la hipérbola.

[2] Espiral de Arquímedes: Es el lugar geométrico de 1 punto del plano que, partiendo del origen de una semirrecta, se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira a su vez uniformemente alrededor de su origen. Esta manera de definir un lugar geométrico se llama mecánica.



Apolonio obtiene las cónicas a partir de las intersecciones de un *cono circular cualquiera*, no necesariamente de revolución, cortando con planos de diferente inclinación. Su estudio sobre las cónicas aporta un conjunto de propiedades, que sólo es superada con las propiedades proyectivas a partir del S XVII. Es también uno de los fundadores de la matemática astronómica griega, es decir, del uso de modelos geométricos para describir el movimiento de los planetas.

La época siguiente corresponde a los trabajos de Diofanto y Pappus (aprox. 250/350). El principal problema de Pappus, también conocido como "lugar determinado por 3 o 4 rectas" puede remontarse a la época de Euclides. Pide: "dadas 3 rectas de un plano, hallar el lugar geométrico de los puntos P que se mueven de tal manera que el cuadrado del segmento PA, trazado con un ángulo fijo a una de las rectas, es proporcional al producto de los segmentos PB y PC, trazados a las otras dos con el mismo ángulo". Para 4 rectas se pide PA PB proporcional a PC PD, siempre con el mismo ángulo.



$P=(x,y) \Rightarrow$

$x^2 = y\,(3-y)$

$x^2 = 3y - y^2$

$x^2 = -[y^2 - 3y + (3/2)^2] + 9/4$

$x^2 + (y-3/2)^2 = 9/4$

(Observar que y-3 me da vacío)

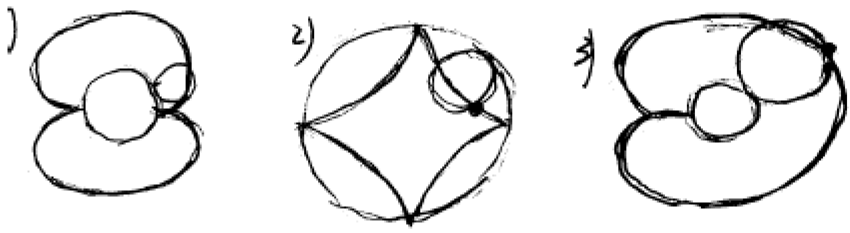
Apolonio ya había estudiado el problema, Pappus prueba que, en todos los casos, el lugar geométrico es una cónica; y extiende el problema a 6 rectas. No puede analizar el problema para 8 rectas, ya que aparecería entonces un producto de 4 segmentos, que no tiene significado geométrico - el de 3 es un volumen. Pappus también trabaja las relaciones entre foco y directriz.

En toda esta época de la geometría medieval, en occidente cabe mencionar al monje Gerberto (930-1003) quien escribe un tratado de geometría. Con la caída de Constantinopla en 1453, los manuscritos griegos pasan nuevamente a occidente donde renacen.

Pasamos entonces a la mirada renacentista de los artistas (como Durero y Leonardo) y de los científicos (como Kepler y Galileo).

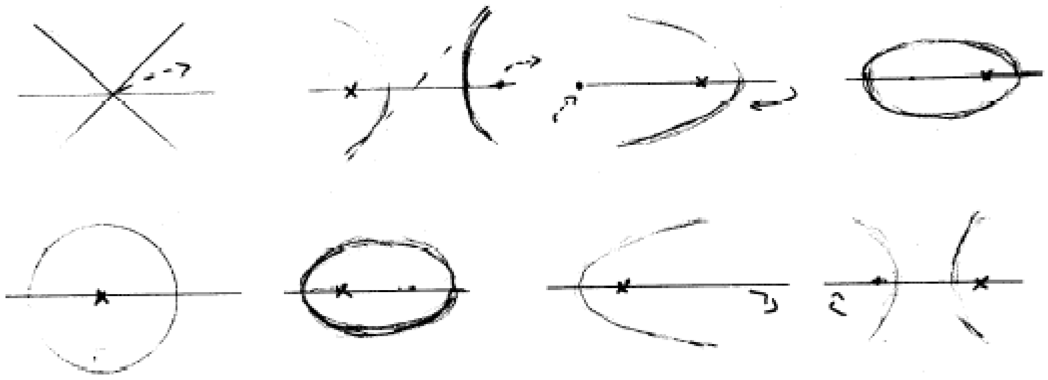
Alberto Durero (1471-1528), pintor, publica un libro llamado "Introducción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas". El libro tiene algunas justificaciones, aunque está pensado esencialmente para artistas. Contiene representaciones aproximadas de espirales, como la de Arquímedes, y la espiral áurea también conocida como espiral de Durero.

También incluye el trazado de cónicas utilizando una doble proyección ortogonal; y de nuevos lugares geométricos como las epicicloides, generadas por un punto P que pertenece a un círculo C que rueda, sin deslizarse, sobre otra circunferencia, por ejemplo, la nefroide (1), la astroide (2) y la cardioide (3) que en breve describiremos en el presente trabajo:

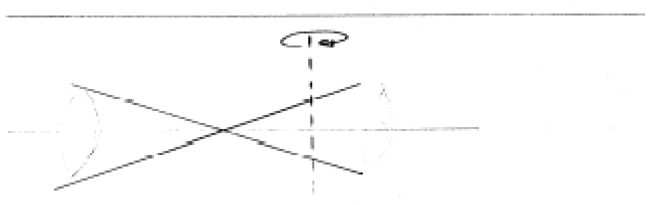


Galileo, en cambio, (1564-1642) analiza curvas como la cicloide y la catenaria. Conjetura acertadamente que el área de la cicloide es el triple de la del círculo que la genera, pero se equivoca al identificar ambas curvas (la cicloide y la catenaria).

Kepler (1571-1630), quien dio su nombre al foco, introduce la idea del principio de continuidad unificado, que permite definir las cónicas a partir del movimiento de uno de los focos. Comenzando con dos rectas coincidentes, en que los dos focos están en el punto de intersección, pasa por las hipérbolas - al alejarse un foco del otro- , las parábolas –cuando llega al infinito-; y las elipses - cuando los focos vuelven a acercarse por el otro lado, para terminar en la circunferencia - cuando éstos vuelven a coincidir.



Otra manera de ver este movimiento continuo, es fijando un plano que contiene al eje del cono, y girando el cono alrededor de una perpendicular al eje que no pase por el vértice.



Llegamos así al siglo XVII con Descartes (1596-1650) y Fermat, donde aparece una nueva manera de representar los lugares geométricos: la manera algebraica.

El primero se dedica a resolver geométricamente ecuaciones algebraicas. Analiza métodos para construir geométricamente las soluciones. Extiende el problema de Pappus analizándolo como ecuaciones de 2do grado (4 rectas), tercer grado (6 rectas), cuártica (8 rectas), etc., aunque no las dibuja. Descartes utilizaba el álgebra como un lenguaje de traducción, es decir, lo que le permitía reducir un problema geométrico a otro u otros problemas también geométricos.

Fermat, reconstruyendo los lugares geométricos de Apolonio, llega a enunciar que "siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva". Analiza ecuaciones lineales (rectas) y cuadráticas (cónicas o pares de rectas). Piensa en la ecuación como la expresión algebraica de las propiedades que caracterizan el lugar geométrico.

El Cabrí en el aula

Una de las grandes problemáticas que afronta la enseñanza de la matemática en la escuela media es la desvinculación de los contenidos con los aspectos geométricos. En la actualidad y en nuestro país, la enseñanza de la matemática se enfoca casi únicamente en el cálculo y el análisis. Parece no haber quedado espacio para la geometría y, contrariamente a todo esto como en una paradoja, se le llega a pedir a los alumnos que hagan una interpretación geométrica de muchos teoremas dados. ¿Cómo pretender que el alumno esté capacitado para hacer una interpretación de una disciplina que le es prácticamente desconocida?

El Profesor José Antonio Mora Sánchez afirma lo siguiente: "La rápida evolución de la tecnología nos permite trabajar en nuestras clases con situaciones más cercanas a la realidad. (...) En principio, la introducción del ordenador en la escuela produce una mejora visible sobre el rendimiento en otras áreas del currículo: el estudiante que puede aplicar sus conocimientos informáticos se muestra más motivado, pero tan sólo algunas situaciones prácticas y/o escolares son trasladables al ordenador: unas son demasiado complejas para el nivel de los estudiantes y para otras no tenemos las herramientas adecuadas, en forma de programas, que faciliten la traducción de la situación."

Sin embargo asegura que no es esta la situación por la que atraviesa la geometría, contamos con una herramienta de excelencia que introduce mucho más que conceptos...

Es un recurso que permite llevar al alumno a comprender la distinción entre figura y objeto geométrico. El principal conflicto que esto trae aparejado es la confusión de conceptos ya que una figura no siempre permite al estudiante referirse a un objeto geométrico debido a las ambigüedades del dibujo, las interpretaciones de los trazados y otra serie de conocimientos previos.

Esta es una situación que el Cabri logra salvar en tanto las figuras pueden ser creadas a partir de sus propiedades esenciales que les dan el carácter que les corresponden. Luego, se puede llegar a modificar esta figura sin perder lo que esencialmente la hace ser tal.

Veamos un ejemplo con el programa: Si queremos construir la mediatriz como lugar geométrico:

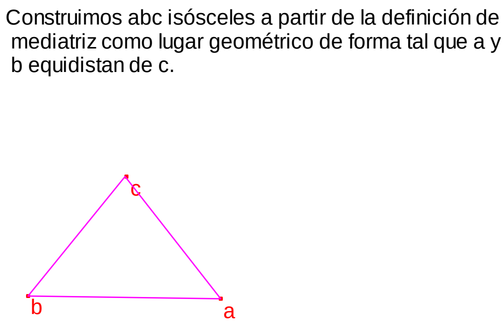
a) Trazamos un segmento.

b) Trazamos la mediatriz del segmento.

c) Colocamos un punto arbitrario que pertenezca a la recta y vemos como los extremos equidistan de dicho punto.

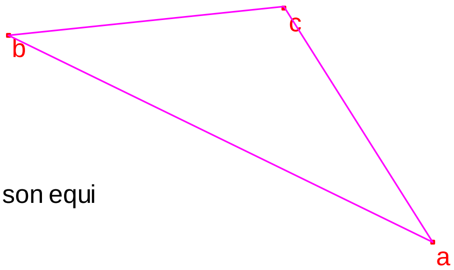
d) A partir de allí construiríamos cualquier triángulo isósceles.

Por supuesto no vamos a atrevernos a decir que esto no es correcto o arcaico, pues sería algo desacertado, sin embargo se pueden proponer otras alternativas que son mucho más dinámicas, que llegan a la misma conclusión pero que pueden llevar al alumno a otro nivel de comprensión o mismo, llevarlo a hacer otras generalizaciones que en el ejemplo anterior sería más difícil y tedioso.



Luego, animamos el dibujo de forma tal que el mismo triángulo modifique su forma pero manteniendo las relaciones que dieron su origen.

Construimos abc isósceles a partir de la definición de mediatriz como lugar geométrico de forma tal que a y b equidistan de c.



Los puntos son equi distantes

Es por eso que destacamos la propuesta innovadora de esta herramienta informática que, como recurso en la clase, logra:

- Admitir el movimiento.
- Permitir la inclusión de algunos elementos variables que podamos modificar.
- Posibilidad de que el programa aprenda con nosotros mediante la construcción y ejecución de procedimientos.
- Introduce del color, hace que los diseños sean más atractivos y realistas.

Este docente de escuela media del que hemos hecho eco en este apartado, en su texto "De la calle al ordenador", llega a las siguientes conclusiones a partir del uso del Cabri como recurso didáctico de la clase:

- Fomenta el aprendizaje de la geometría dinámica frente a la geometría estática del papel impreso. Nuestros estudiantes se pueden preparar para el análisis de muchos mecanismos que encuentran en la calle.
- Conecta las matemáticas con un área de conocimiento importante en nuestra sociedad como lo es la tecnología.
- Permite dar a las matemáticas un enfoque práctico que atrae a los estudiantes a la investigación y el estudio.

Y más aún, destaca el carácter interactivo del programa que permite la posibilidad de introducir cambios y comprobar el efecto de esos cambios, algo que difícilmente podemos conseguir con otros materiales.

Muchos docentes han incursionado en este nuevo ámbito. La página oficial de Cabri ofrece una sección dedicada únicamente a testimonios de profesionales de la educación que se han arriesgado a emplear el programa en sus clases. De ellos, destacamos uno en particular de un docente de Suiza, que en líneas generales expone los ejes troncales de esta investigación:

> "Lo que me impacta más en la utilización de Cabrí II Plus es que uno termina por olvidar la herramienta informática para centrarse en el problema geométrico o de otro tipo; el software llega a ser una herramienta a disposición."
>
> **Profesor de matemática - Suiza**

LA ENSEÑANZA DE LUGAR GEOMETRICO EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA:

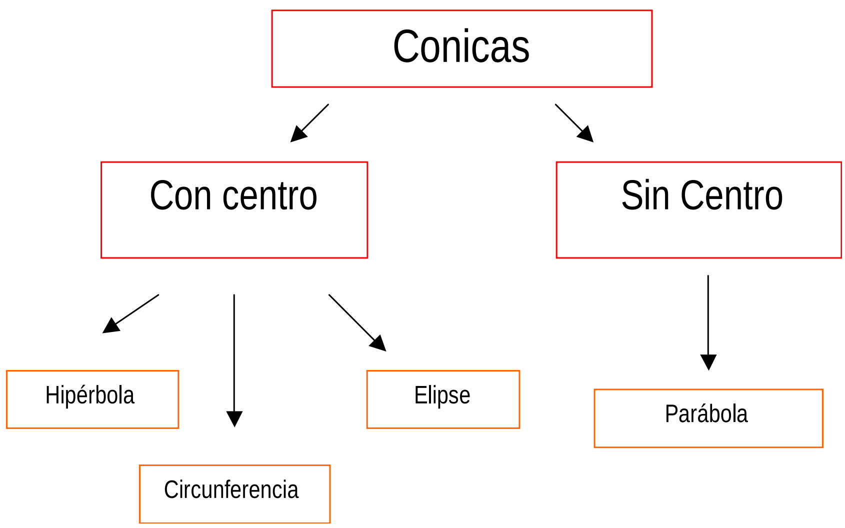
En la actualidad, de acuerdo a trabajos de campo en las escuelas medias, no se enseña la idea de lugar geométrico pues la geometría ha perdido mucho campo de acción. A continuación propondremos definiciones, formas de abordaje, ejercicios, resolveremos algunos de ellos y enunciaremos los lugares geométricos más conocidos y otros, que no lo son tanto pero que resultan mucho más que interesantes.

Nos proponemos hacer una breve caracterización de los lugares geométricos que más conocidos son, dentro de ellos resolveremos ejercicios utilizando este recurso de geometría dinámica, propondremos otros y haremos una propuesta para su aplicación en escuela media. No obstante incluiremos otros lugares geométricos como parte de la investigación y que si bien no se encuadran dentro del diseño curricular de la escuela media, no exigen tantos saberes previos y son realmente notables.

- CONICAS[3]:

Aquellas figuras planas que resultan de seccionar una superficie cónica circular recta con un plano, son denominadas cónicas, las cuales pueden ser definidas por sus lugares geométricos.

A continuación se detalla su respectiva clasificación:



[3] Aquí se hará un repaso del tema, con ejercicios resueltos en Cabrí y se proponen algunos ejercicios posibles para dar en escuela media en "Una propuesta de taller".

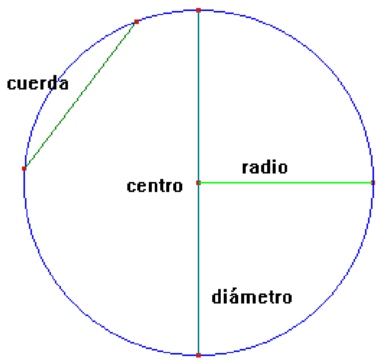
Ecuación general de segundo grado con dos variables

Todas las cónicas responden a la siguiente ecuación:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde los primeros tres términos son los términos cuadráticos; los otros dos, los términos lineales y por último, el término de grado cero. Esta ecuación varía según de qué cónica estemos hablando.

- **Circunferencia**

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro punto fijo del mismo. El punto fijo se denomina centro de la circunferencia y la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro de la misma se nombra radio.

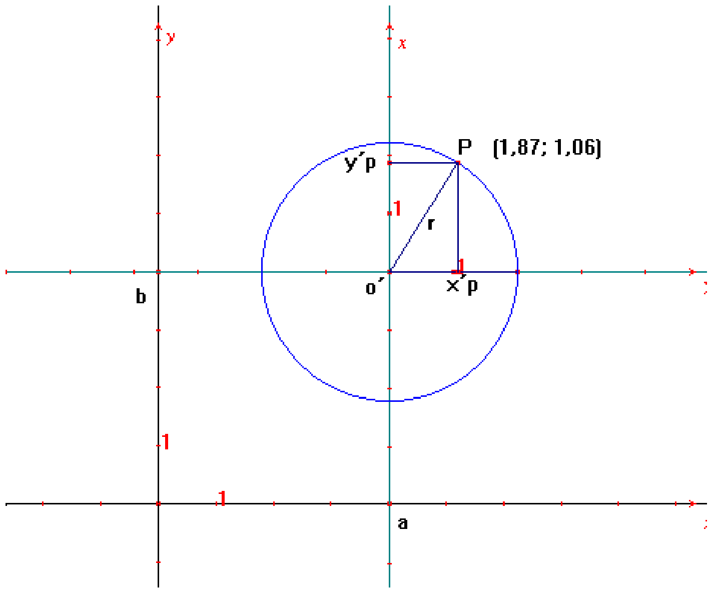


Centro: es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

Radio: es el segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.

Diámetro: es el mayor segmento (cuerda) que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro de la misma.

Cuerda: es el segmento que une dos puntos de la circunferencia.



Ecuaciones de la circunferencia

<u>Ecuación canónica:</u>

$$d(c;p) = r;\ r > 0$$
$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = r$$
$$x'^2 + y'^2 = r^2$$

Siendo $x' = (x-\alpha)$ y $y' = (y-\beta)$ la ecuación queda de la siguiente forma:

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$; α y β indican el centro de la circunferencia, mientras que r representa el radio de ésta. En caso de que la circunferencia tenga como centro el origen de coordenadas $(0;0)$ la ecuación correspondiente sería: $x^2 + y^2 = r^2$, ya que α y β son iguales a cero.

<u>Ecuación general:</u>

A partir de la forma ordinaria de la circunferencia podemos obtener la ecuación general.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$
$$(x^2 - 2x\alpha + \alpha^2) + (y^2 - 2x\beta + \beta^2) = r^2$$
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

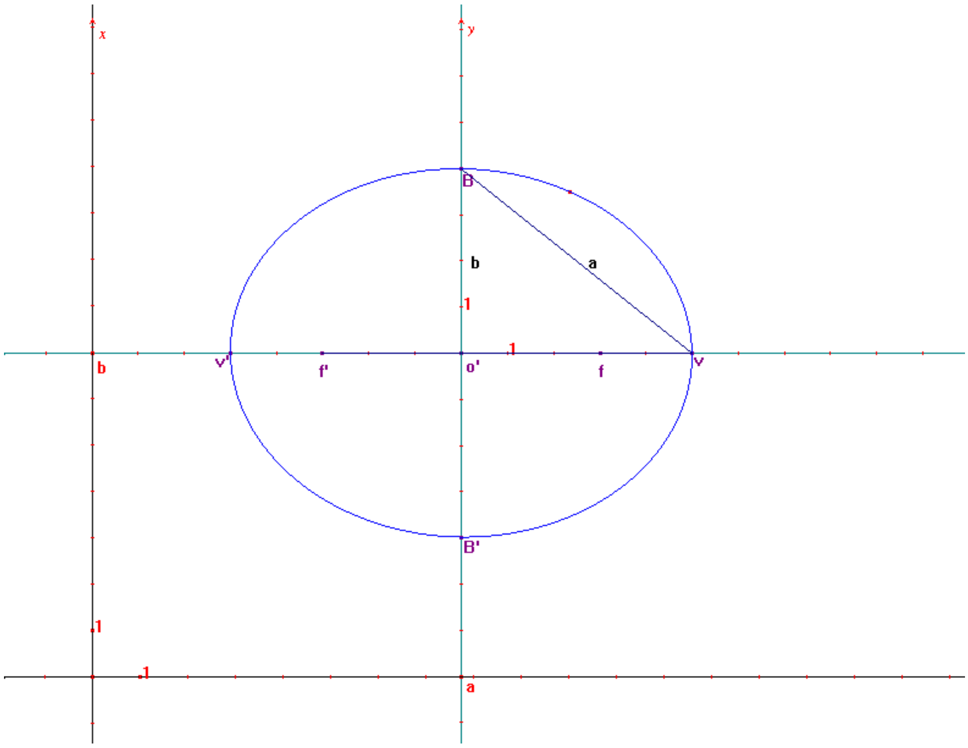
- $D = -2\alpha$
- $E = -2\beta$
- $F = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$

Basándose en la ecuación general completa en dos variables, si hablamos de la circunferencia, varía de esta manera:

- $B = 0$
- $A \neq 0 \wedge C \neq 0$
- $A = C$
- Cuando $D = E = 0$ el centro coincide con el origen
- Si $D = 0$ y $E \neq 0$ el centro pertenece al eje de las ordenadas
- Si $D \neq 0$ y $E = 0$ entonces el centro pertenece a al eje de las abscisas
- $F = 0$ Si y solo si el origen de coordenadas pertenece a la circunferencia.

- **<u>Elipse</u>**

Es el lugar geométrico de puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del mismo es constante. A estos puntos fijos se los denomina focos y a la constante la simbolizamos: $2a$



Referencias:

- Focos: son los puntos fijos de la definición. (f, f')
- Distancia focal: es la distancia entre los focos $(2c)$
- x' : eje focal (es la recta determinada por los focos)
- vértices: son las intersecciones del eje focal con la elipse (v, v')
- $\overline{vv'}$: eje o diámetro mayor
- $2a$: longitud del eje mayor
- $y' =$ eje normal (es la mediatriz del segmento $\overline{vv'}$)
- $\overline{BB'}$: : eje o diámetro menor
- $2b$: longitud del eje menor
- cuerda: es todo segmento determinado por los puntos de la elipse
- Cuerda focal: es toda cuerda que pasa por un foco.

- Propiedad pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$

- Excentricidad: es el cociente entre la semi-distancia focal y el semidiámetro mayor.

$e_x = \frac{c}{a}$; como en la elipse $c < a$ resulta $0 < e_x < 1$

- Lado recto: es toda cuerda focal perpendicular al eje focal.

Ecuaciones de la elipse

<u>Ecuación canónica:</u>

Un punto P pertenece a la elipse sí y solo sí $d(f;P) + d(f';P) = 2a$; a partir de esta ecuación obtenemos la ecuación canónica u ordinaria de la elipse:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Siendo $x' = (x - \alpha)$ y $y' = (y - \beta)$ la ecuación queda formada de la siguiente manera: $\frac{(x' - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$. Las variables α y β indican las coordenadas del centro; los denominadores a y b representan la distancia del centro al punto de intersección de la elipse con los ejes coordenados. El mayor de ellos indica el eje focal.

<u>Ecuación general</u>:

Si desarrollamos la ecuación canónica conseguimos la ecuación general:

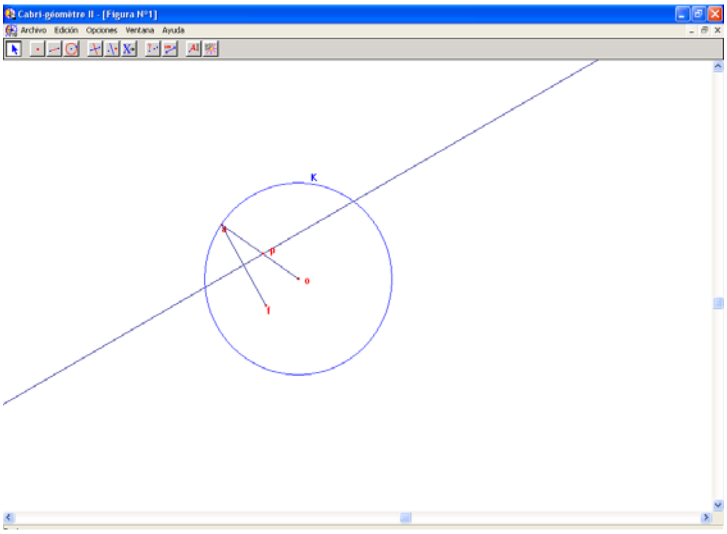
$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$
$$(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)b^2 + (y^2 - 2\beta y + \beta^2)a^2 = a^2 b^2$$
$$b^2 x^2 - 2\alpha b^2 x + b^2 \alpha^2 + a^2 y^2 - 2\beta a^2 y + a^2 \beta^2 - a^2 b^2 = 0$$
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Condiciones:

- $B = 0$

- $A \neq C \ signo \ de \ A = signo \ de \ C$
- Cuando $\alpha \wedge \beta = 0$ quiere decir que el centro coincide con el origen de coordenadas.
- $F = 0$ Sí y solo sí el origen de coordenadas pertenece a la elipse.

Construcción de la elipse como lugar geométrico en Cabrí Geómetra:

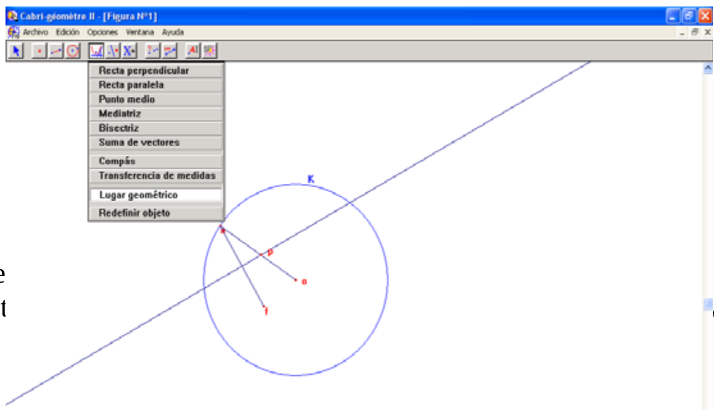


1. con la herramienta *circunferencia* construyo la circunferencia K de centro o.

2. Sobre K marco el punto a y un punto f en el interior de la misma.

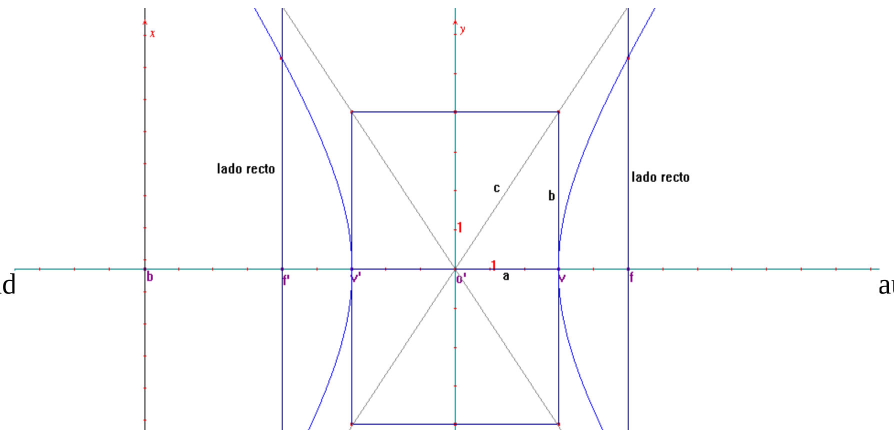
3. Con la opción segmento determine AF y AO. Trace la mediatriz correspondiente al segmento AF. Dicha mediatriz interseca a AO en el punto p.

4. el lugar geométrico formado de p con respecto a “a” es la elipse E.



- <u>Hipérbola:</u>

Es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias8en valor absoluto) a dos puntos fijos del plano, denominados focos, es constante. El valor de dicha constante es: $2a$



Referencias:

- x' : eje focal
- y' : eje conjugado
- $\overline{vv'}$: eje transverso o real
- focos: los puntos fijos de la definición (f, f')
- vértices: son las intersecciones del eje focal con la hipérbola. (v, v')
- $2a$: longitud del eje transversal
- $2b$: longitud del eje conjugado
- $2c$: distancia focal
- Propiedad pitagórica: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > a \wedge c > b$
- Excentricidad: es el cociente entre la semi-distancia focal y el semieje transverso.

$e_x = \dfrac{c}{a}$; ya que c>a, resulta: $e_x > 1$

- Lado recto = $2\dfrac{b^2}{a}$

Ecuaciones de la hipérbola

Ecuación canónica:

Un punto P pertenece a la hipérbola sí y solo sí $\left|d(f;P)-d(f';P)\right|=2a$; si realizáramos el desarrollo de esta ecuación obtendríamos la ecuación canónica de la figura.

$\dfrac{x'^2}{a^2}-\dfrac{y'^2}{b^2}=1$ Esta ecuación es de eje focal x'

Esta ecuación es de eje focal y' $-\dfrac{x'^2}{b^2}+\dfrac{y'^2}{a^2}=1$

Como $x'=(x-\alpha)$ y $y'=(y-\beta)$ siendo $\alpha\ y\ \beta$ las coordenadas del centro, las ecuaciones resultan ser

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$
$$-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$$

Ecuación general:

Obtenemos la ecuación general a partir del despliego de:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

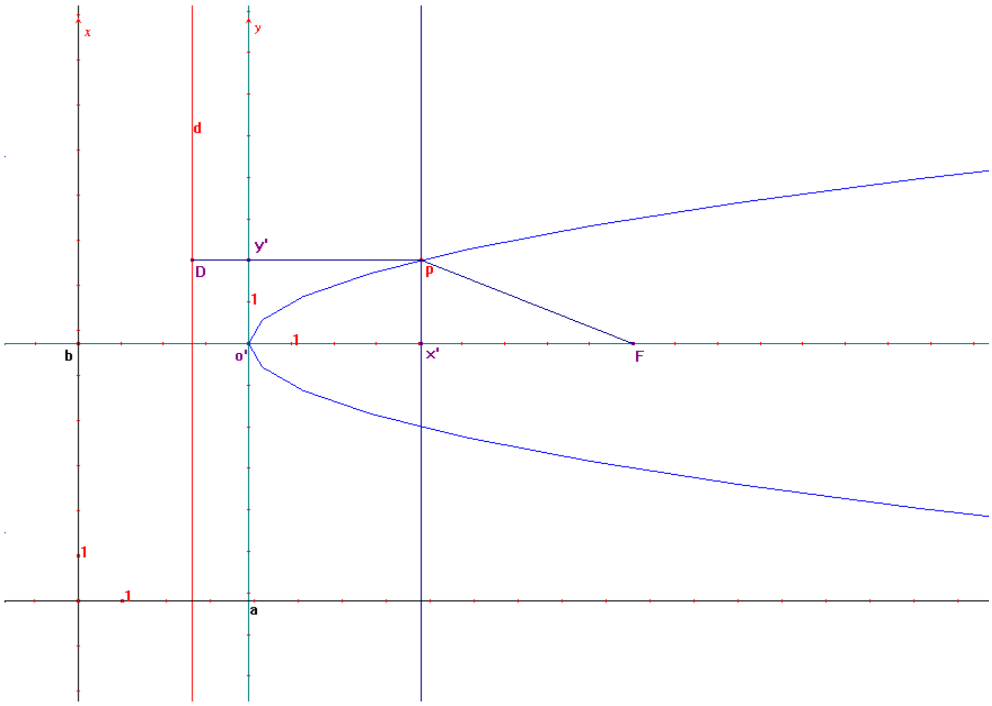
Luego:
$$b^2-a^2-2\alpha b^2-2\beta a^2+\alpha^2b^2-a^2\beta^2-a^2b^2=0$$
$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Condiciones:

- $B=0$
- $signo\ A\neq signo\ C$
- $AC<0$
- Cuando $a=b$ la hipérbola es equilátera.

- **Parábola**

Es el lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de un punto y de una de recta fijos del mismo. (el punto no pertenece a la recta)



Referencias:

- F :foco (punto fijo de la definición)
- d :directriz (recta fija de la definición)
- p :parámetro $p \neq 0$ sí y solo sí $F \notin d$
- x' :eje focal
- $o' : v$:vértice (es el punto medio de la distancia entre el foco y la directriz)
- Lado recto: $2|p|$

Ecuaciones de la parábola

<u>Ecuación canónica:</u>

Un punto P pertenece a la parábola sí y solo sí $d(P,F)=d(P,d)$

$F(p/2;0) \quad P(x';y') \quad D(-p/2;y')$

Como $\dfrac{d(P,F)=d(P,d)}{\sqrt{(x'-p/2)^2+y'^2}=\sqrt{(x'+p/2)^2}}$ al desarrollar obtenemos la ecuación canónica de la parábola:

Parábola de eje horizontal (eje focal x')

$y'^2=2px'$

Como $x'=x-\alpha \wedge y'=y-\beta$ la ecuación definida es $(y-\beta)^2=2p(x-\alpha)$ de vértice $(\alpha;\beta)$

Parábola de eje vertical (eje focal y')

$x'^2=2py'$

Luego si reemplazamos por $x'=x-\alpha \wedge y'=y-\beta$ la ecuación es: $(x-\alpha)^2=2p(y-\beta)$ de vértice $(\alpha;\beta)$

Ecuación general

Si desarrollamos la ecuación canónica resulta:

$$
\begin{aligned}
&(y-\beta)^2=2p(x-\alpha)\\
&y^2-2y\beta+\beta^2=2px-2p\alpha\\
&y^2-2p\beta+\beta^2-2px+2p\alpha=0\\
&y^2-2px-2\beta y+\beta^2+2p\alpha=0\\
&Cy^2+Dx+Ey+F=0
\end{aligned}
$$

(De igual forma se realiza para $(x-\alpha)^2=2p(y-\beta)$)

Condiciones:

Eje horizontal:

- $B = 0$
- $A = 0 \wedge C \neq 0$
- $A = 0 \wedge D = 0$
- $F = 0$ Sí y solo sí el origen de coordenadas pertenece a la parábola.

Eje vertical:

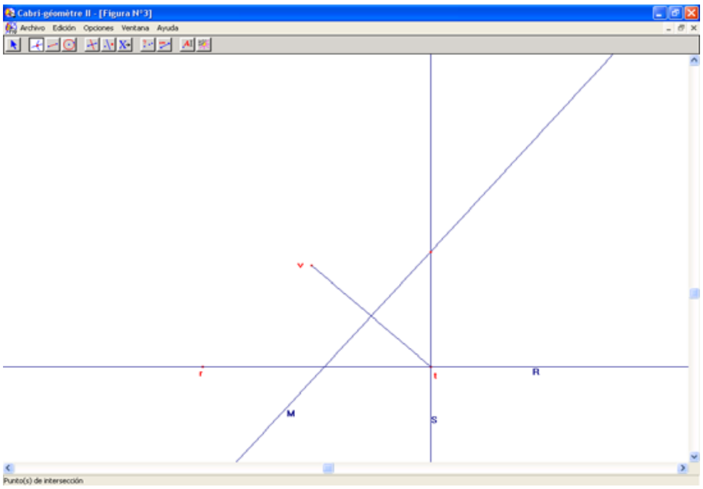
- $B = 0$
- $C = 0 \wedge A \neq 0$
- $C = 0 \wedge E \neq 0$
- $F = 0$ Sí y solo sí el origen de coordenadas pertenece a la parábola.

Construcción de la parábola como lugar geométrico

Pasos a seguir:

1. marque un punto r
2. por r trace la recta R
3. Marque el punto v en otro sector del plano.

4. con la opción *punto sobre objeto* marque t en R



5. trace por el punto t la recta perpendicular denominada S a R

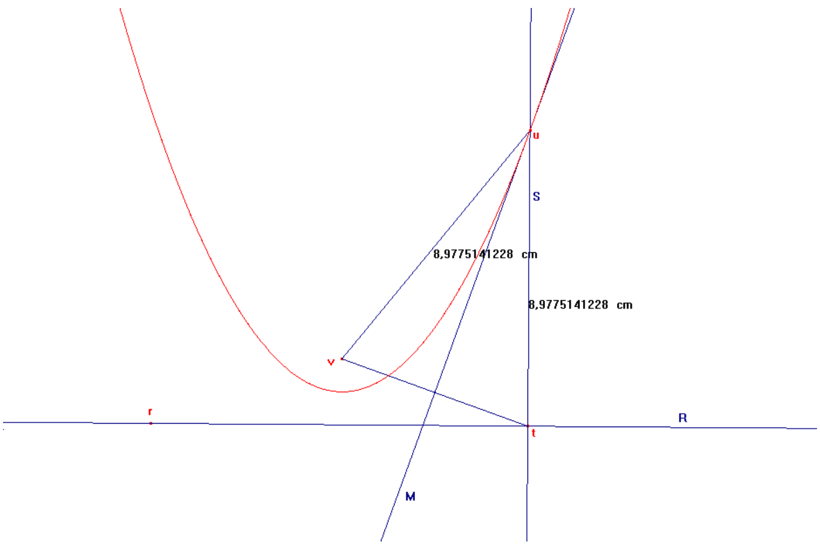
6. Mediante la herramienta *segmento* una v y t: TV

7. trace la mediatriz (M) de TV y marque el punto de intersección entre M y S. (u - utilice *punto intersección)*

8. Con la herramienta segmento una u con v: UV. Utilice la herramienta *distancia y longitud* para obtener la medida del segmento.

9. Determine el segmento UT al cual calcúlele su longitud.

10. por ultimo con la herramienta *lugar geométrico* marque el lugar geométrico definido por...



- **CUADRICAS[4]:**

Las cuádricas son el lugar geométrico de los puntos del espacio (x, y, z) que verifican una ecuación de segundo grado del tipo

$$\underbrace{Bx^2+Cy^2+Dz^2}_{\textit{Términos cuadráticos}}+\underbrace{Exy+Fxz+Gyz}_{\textit{Términos Rectangulares}}+\underbrace{Hx+Ly+Mz}_{\textit{Términos lineales}}+\underbrace{N}_{\textit{T. Indep.}}=0$$

La ecuación de una cuádrica se puede escribir en forma matricial como:

$$(1,x,y,z)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

Donde:

$$a_{00}=N,\quad a_{11}=B,\quad a_{22}=C,\quad a_{33}=D$$
$$a_{01}=H/2,\quad a_{02}=L/2,\quad a_{03}=M/2$$
$$a_{12}=E/2,\quad a_{13}=F/2,\quad a_{23}=G/2$$

Con B, C, D, E, F y G no simultáneamente nulos. Ahora bien con todos los coeficientes distintos de cero, la misma ecuación puede escribirse de la forma:

Ecuación canónica de las cuádricas con centro

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c}=1$$

Ecuaciones canónicas de las cuádricas sin centro

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz$$

[4] Este apartado fue diseñado con el objeto de servir de guía para aquellas escuelas con una currícula muy desarrollada en Ciencias y Matemática y que puedan animarse a trabajar con Software en 3D (como también ofrece el Cabrí).

Análisis de la ecuación de una cuádrica

Para graficar una cuádrica hay que tener en cuenta:

- Intersección con los ejes coordenados
- Trazas o intersecciones con los planos coordenados.
- Simetrías con respecto a los ejes coordenados, planos coordenados y al origen de coordenadas.
- Secciones con planos paralelos a los coordenados.
- Extensión de la gráfica.

Con respecto a la simetría, decimos que para determinar si una superficie F(x; y; z)=0

Es simétrica con respecto a los ejes coordenados, planos coordenados y origen de coordenadas debe tenerse en cuenta el siguiente cuadro:

	Superficies simétricas respecto al:
a) F(x; y; z)= F(-x; y; z)=0	Plano yz
b) F(x; y; z)= F(x; -y; z)=0	Plano xz
c) F(x; y; z)= F(x; y; -z)=0	Plano xy
a) F(x; y; z)= F(-x; -y; z)=0	Eje z
b) F(x; y; z)= F(-x; y; -z)=0	Eje y
c) F(x; y; z)= F(x; -y; -z)=0	Eje x
F(x; y; z)= F(-x; -y; -z)=0	Origen de coordenadas.

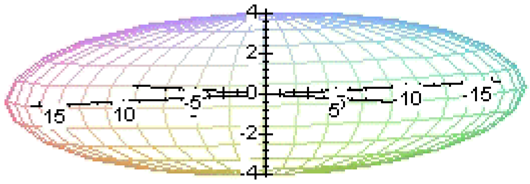
CUÁDRICAS CON CENTRO

- **Elipsoide**

La ecuación de esta cuádrica es del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c}=1$$

Donde podemos observar que sus coeficientes son todos positivos.

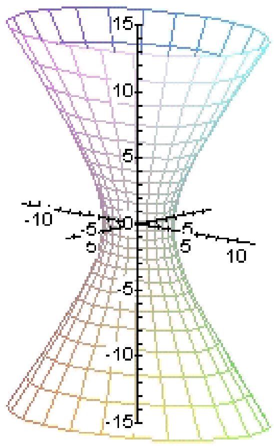


Elipsoide

- **<u>Hiperboloide de una hoja</u>**

Si dos de los coeficientes de la ecuación: $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c}=1$; son positivos y uno negativo, se tiene la ecuación de un *hiperboloide de una hoja*. Es decir:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c}=1;\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c}=1;\qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c}=1$$ (***)

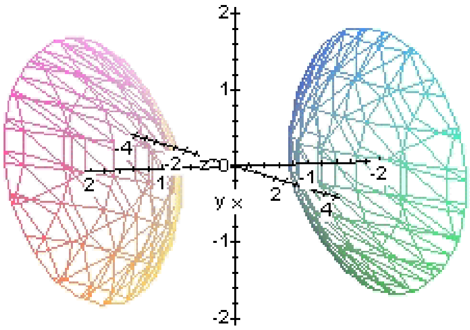


Hiperboloide de una hoja

- **<u>Hiperboloide de dos hojas</u>**

Si uno de los coeficientes de la ecuación: $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c}=1$, es positivo y dos negativos, se tiene la ecuación de un *hiperboloide de dos hoja*. O sea:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c} = 1\;; \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c} = 1\;; \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c} = 1$$

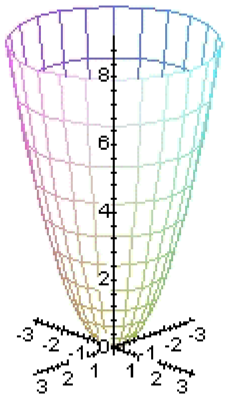


Hiperboloide de dos hojas

<u>CUÁDRICAS SIN CENTRO</u>

- <u>**Paraboloide elíptico**</u>

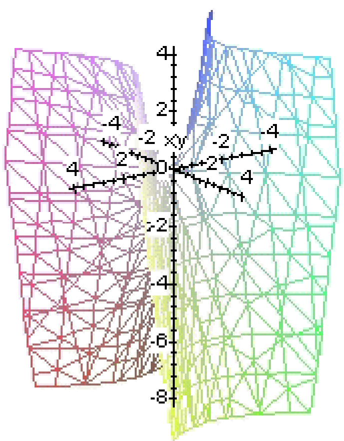
I. Cuya ecuación es del tipo: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz$



Paraboloide elíptico

- **Paraboloide hiperbólico**

La ecuación es del tipo: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2cz$



Paraboloide hiperbólico

Importante: el paraboloide elíptico como el hiperbólico se hallan situados a lo largo del eje correspondiente a la variable de primer grado de sus respectivas ecuaciones

CUÁDRICAS DEGENERADAS

- **Superficies cilíndricas**

Se llama superficie cilíndrica a la superficie engendrada por una recta (llamada generatriz) que se desplaza siempre paralela a una recta fija y que pasa por todos los puntos de una curva fija.

La ecuación de la superficie cilíndrica recta con generatrices perpendiculares al plano coordenado que incluye a la directriz, carece de la variable no medida en ese plano. El lugar geométrico plano de esta ecuación es la directriz.

Las ecuaciones de los cilindros son del tipo:

Cilindro elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Cilindro hiperbólico: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Cilindro parabólico: $\frac{x^2}{a^2} = y$

- **Superficie cónica**

Se llama superficie cónica a la engendrada por una recta que se desplaza de tal manera que se pasa por todos los puntos de una curva fija (llamada directriz) y por un punto fijo (llamado vértice), que no pertenecen al plano de al curva.

Su ecuación es del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c} = 0 \; ; \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c} = 0 \; ; \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c} = 0$$

- TRABAJANDO CON ÁNGULOS Y SEGMENTOS:

Sucede que es muy común que en escuela media, en los primeros acercamientos que se hacen a la geometría plana, se comience a trabajar con triángulos y sus puntos notables, estudiando propiedades, infiriendo lo que todavía no se conoce como teoremas. Es así que uno de los primeros lugares geométricos que se suele enseñar es la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo. Desde luego que es muy poco frecuente ver que el tratamiento se haga desde la noción de lugar geométrico, por el contrario, se tiende a reducirlo sólo a rectas o segmentos que guardan ciertas relaciones con la figura original. Aquí desarrollamos una propuesta utilizando un entorno de Geometría Dinámica:

- ***Bisectriz de un ángulo:*** la bisectriz está contenida en el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados. Este lugar geométrico está constituido por las bisectrices de los cuatro ángulos que se forman al cortar las dos rectas. Dichas bisectrices coinciden dos a dos. Así pues, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas está constituido por dos rectas que son las bisectrices de los ángulos que forman.

En la actualidad es muy común que en escuelas medias se trabaje el concepto de bisectriz de la siguiente forma: se traza el sector angular que se quiere bisecar. Por el origen se traza una circunferencia de un radio cualquiera. En la intersección de ésta con los lados del sector se marcan dos puntos. Luego se elige un radio fijo (que no es arbitrario, exige un dominio) y por los puntos de intersección se trazan dos arcos o circunferencias. Dicho punto de intersección y el origen dan lugar a la bisectriz.

En esta construcción que se adjunta, si se revisa la misma, se puede ver que reproduce tal cual la forma en que los alumnos suelen construir la bisectriz de un ángulo. Desde luego hay otras formas, pero el por qué de nuestra elección reside en mostrar que se puede trabajar de igual forma con el Cabrí que con formas didácticas anteriores, pero en este caso, permitiendo al alumno ver qué sucede si las circunferencias que crean para intersecar no son lo suficientemente grandes como para que esto suceda. En tal caso, en la animación propuesta vemos como la bisectriz desaparece, cuando en realidad esto no sucede.

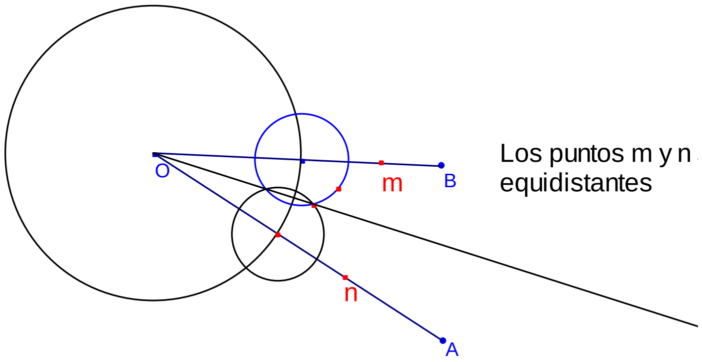
Esto pone de manifiesto que las construcciones geométricas, aún en Cabrí, tienen un cierto dominio de existencia del que uno tiene que dar cuenta si pretende sacar conclusiones lo más precisas posibles a partir de la experimentación.

- ***Mediatriz de un segmento:*** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento. Este lugar geométrico resulta ser la recta perpendicular al segmento por su punto medio.

La construcción propuesta y realizada en Cabrí que se adjunta, al igual que definimos bisectriz de un ángulo o sector angular, esta elaborada especialmente de la forma en que suele crearse en la escuela media.

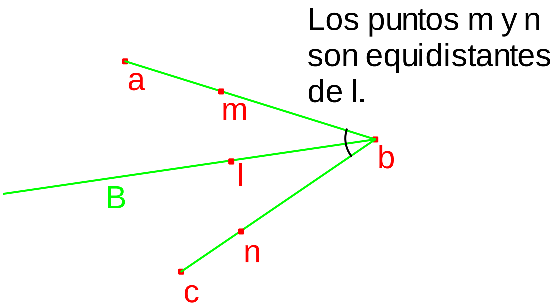
En esta propuesta también podemos detectar un dominio de existencia a partir de la creación que no ha sido hecha por las primitivas geométricas. Lo interesante de esto es poder ver que el Cabrí puede representar de igual forma un dibujo como los realizados en lápiz y papel, pero la diferencia reside en que al interactuar con éste el alumno puede percibir como las restricciones de su construcción afectan la existencia de la misma.

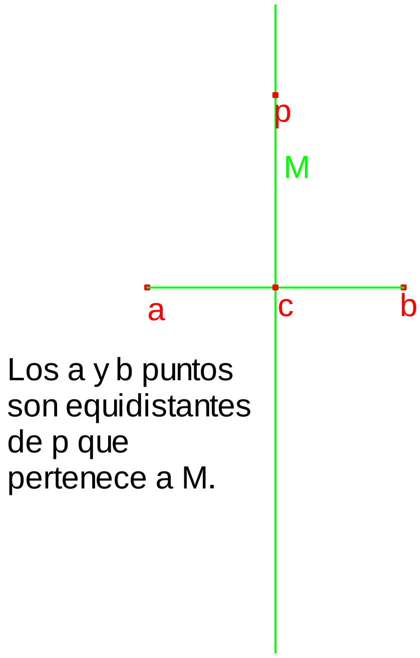
Por ello es que el Cabrí resulta ser una propuesta, cuando menos, interesante ya que a la hora de resolver la consigna, el alumno puede ser guiado a analizar las carencias de la construcción, que de otra forma es menos probable que lo haga.



Generalización de los conceptos tratados:

En este otro archivo generado en Cabrí, se crean M y B (mediatriz de ab bisectriz de $a\hat{b}c$ respectivamente), pero aprovechando las herramientas de la interfaz. Es decir, en este caso, tanto M como B fueron construidos a partir de la definición de lugar geométrico, con lo cual su dominio de existencia ya no tiene más restricciones que la de la propia definición.





- TAN POCO USUALES COMO ATRACTIVOS:

Este es uno de los apartados más interesantes, a nuestro criterio, en tanto nos abrió el camino a nuevos lugares geométrico que no conocíamos, nos permitió investigar y en gran medida nos obligó a analizar por qué desconocíamos tales cosas.

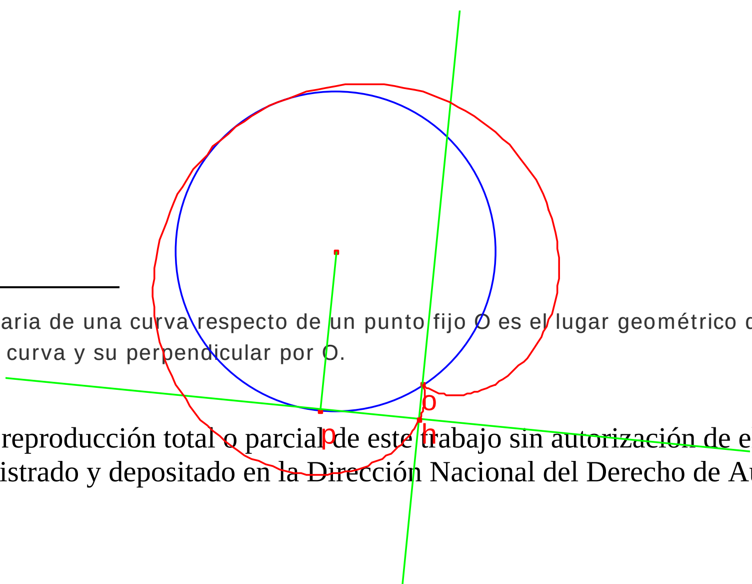
Es por tal motivo que nos pareció pertinente ampliarlo, no sólo por la relación que guarda con el tono del presente trabajo sino también para poder sembrar en el lector esa “semillita de curiosidad” que lo incite a indagar más en este tipo de construcciones.

Quisiéramos destacar, que algunas de ellas, no han sido elaboradas por el grupo de trabajo en tanto nos forzaba a trabajar con macros, tema que no sólo desconocemos sino que consideramos que incluirlo sería desdibujar en parte los objetivos del presente. Por tal motivo es que decidimos incluirlos pero no por ello dejamos de analizarlos y reformularlos.

- ***<u>Cardioide:</u>*** quien ha trabajado en coordenadas polares (otro sistema de representación diferente al cartesiano o de coordenadas rectangulares) probablemente conozca la forma de la cardioide, su ecuación, sus degeneraciones... No obstante, ¿conoce que también puede ser definido como un lugar geométrico?

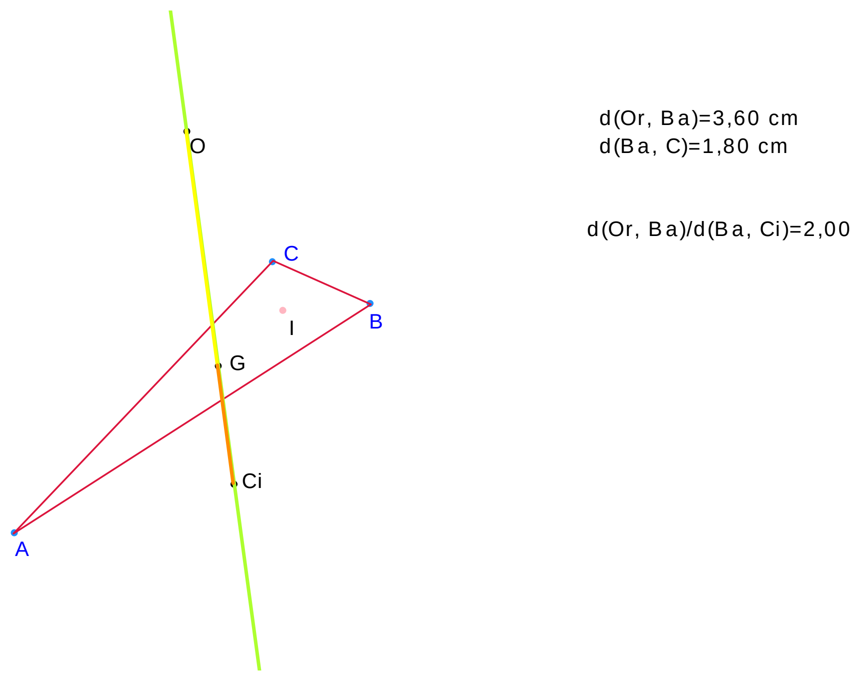
Como lugar geométrico, la cardioide es la podaria[5] del círculo respecto a uno de sus puntos. Como la cardioide existen muchas otras curvas de similar construcción y características, pero esta en particular, es la más sencilla de todas las epicicloides y es por eso que la hemos seleccionado. Le proponemos vea lo siguiente:

Nota: en el archivo que se adjunta con todas las construcciones es posible animar la figura a partir de su punto libre.



[5] <u>Podaria:</u> Geom. La podaria de una curva respecto de un punto fijo O es el lugar geométrico de los puntos de corte entre cada tangente a la curva y su perpendicular por O.

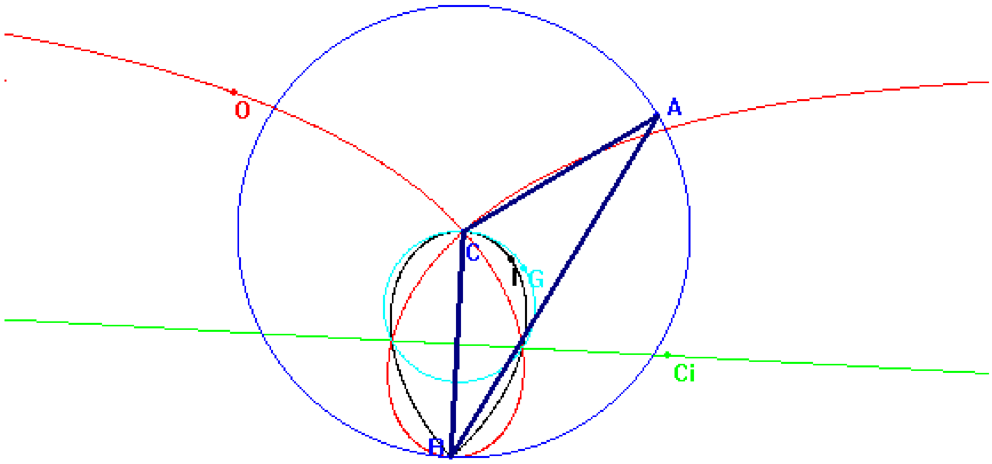
- ***Recta de Euler:*** la recta de Euler está dada en un triángulo abc genérico de forma tal que contiene a tres de los puntos notables del mismo: el ortocentro (O), el baricentro (G) y el circuncentro (Ci), de forma tal que estos puntos están alineados y cumplen con la siguiente propiedad: la distancia entre el ortocentro y el baricentro es el doble de la distancia entre el baricentro y el circuncentro.



Aclaramos en esta instancia que la construcción de la misma está dada por la intersección de las alturas para hallar el ortocentro, de las medianas para hallar el baricentro y de las mediatrices para hallar el circuncentro.

Una propuesta interesante que proporciona el Cabrí es la de comprobar que los tres puntos están alineados o bien la de dibujar una recta que pase por dos de ellos y verificar que el tercero pertenece a ésta.

- ***Los cuatro, pero… ¿todos juntos?***: Este en particular, más que un lugar geométrico es la intersección de cuatro de ellos que se cortan, todos, en dos puntos. ¿Confuso, no?... Veamos que nos ofrece el Cabrí y luego interpretemos.



Para comenzar debemos inscribir un triángulo abc en una circunferencia cualquiera. Luego, como ya se vio en el apartado anterior, marcamos el incentro (I), el baricentro, (G), el circuncentro (Ci) y el ortocentro (O), todos, puntos notables del triángulo.

Al variar alguno de los dos puntos libres, el movimiento de los puntos notables generan:

G: genera una circunferencia semejante a la original de razón 1/3.

Ci: genera la mediatriz de bc.

I: genera un pétalo

O: genera el "folium de Descartes"

Todo esto no es azaroso sino producto de las propiedades geométricas de los puntos notables del triángulo, que, gracias al entorno dinámico y a la posibilidad de movimiento del dibujo, podemos ver qué curvas describen estos puntos en movimiento.

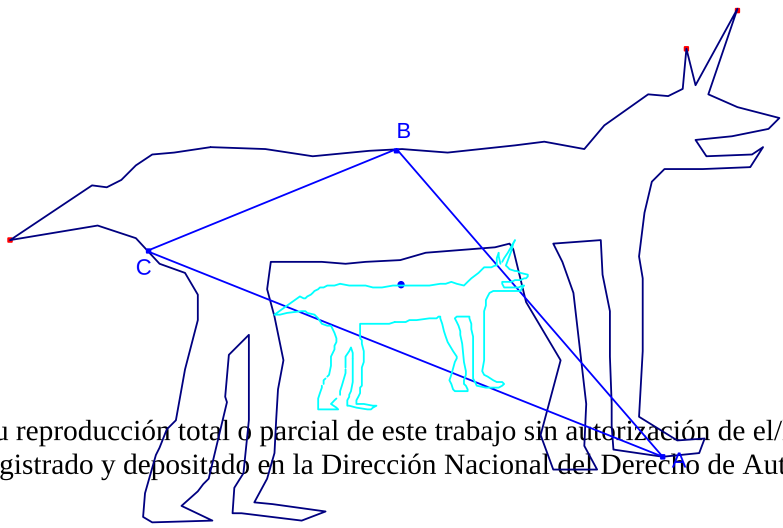
Una de las propiedades que tiene esta construcción en particular, es que los cuatros lugares geométricos se intersecan entre ellos sólo en dos puntos de forma tal que esos puntos son comunes a todos los lugares encontrados.

- ***<u>¿Ampliaciones? ¿Reducciones? ¡Geométricamente, es posible</u>***!: Este es el último lugar geométrico que citaremos, a nuestro criterio, el más llamativo de todos. Desde luego, queremos aclarar, que la construcción no es nuestra pues la analizamos y se necesitaba operar con macros, pero no por eso es difícil porque la magia gira en torno al baricentro.

Esta puede ser una propuesta para estudiantes más avanzados de escuela media que ya conozcan y manejen las propiedades de los puntos notables.

Primero se dibuja un polígono cualquiera donde lo interesante es que sea un dibujo significativo para los alumnos así se sorprenden más con el resultado. Luego se inscribe un triángulo genérico en el y se busca el baricentro.

Si tenemos la posibilidad de dar movimiento a uno de los puntos libres de dicho triángulo recorriendo todo el polígono, veremos como el baricentro reproduce la figura original de forma semejante y de razón 1/3. Esto parece hecho con magia pero no es así, se debe a una propiedad geométrica del baricentro que es la de cortar a las mediana en relación 2 es a 1, por ello quedan divididas en 1/3 y 2/3 la mediana original.



ANEXO:

Si bien no fue algo que el grupo haya planificado, este apartado da cuenta de una propuesta que se generó, más allá de las hipótesis primeras, a partir de la interacción con el software de geometría dinámica y con la lectura de los distintos autores que hemos citado a lo largo de la presente investigación.

- **Una propuesta de taller:**

Esta propuesta está ideada para llevarse a cabo en escuelas medias de ciclos superiores donde ya se haya visto un mínimo de contenidos sobre Geometría plana.

Sabemos que las clases de Matemática están, usualmente, divididas en dos o tres días específicos. Por tal motivo es que se puede gestionar la forma en la Institución elegida, de ocupar uno de esos módulos en un taller en el laboratorio de Informática (siempre y cuando el establecimiento cuente con dicho espacio).

El resto de los módulos tendrían carácter teórico, donde no sólo se haría una introducción al Análisis y al Álgebra, como suele suceder, sino que se dedicaría un espacio al tratamiento Geométrico.

Posteriormente, el día en que los chicos vayan al taller, se plantearán problemas que pueden ser de cualquier rama de la Geometría y se puede trabajar, por ejemplo con el Cabrí.

De esta forma, consideramos, se hallaría un equilibrio entre lo que planteamos al inicio del trabajo cuando fundamentamos el tema: la incorporación de herramientas informáticas a la enseñanza de la Matemática y el tratamiento teórico que esta Ciencia merece. Así, los alumnos podrán contar con un elemento práctico y experimental que facilite la comprensión de los componentes teóricos, que muchas veces son difíciles de formalizar en este ámbito.

Siguiendo con la línea de trabajo de la investigación, proponemos algunos ejercicios para tratar en escuela media que logran este equilibrio mencionado en torno a la enseñanza de lugares geométricos:

- Dada una circunferencia de radio r y un punto a perteneciente a ella, trazar una segunda circunferencia que sea tangente a la primera por a y que pase por b exterior a la circunferencia dada.
- Sea AB un segmento y P un punto en él. Sean APC y PBD triángulos equiláteros del mismo lado del segmento AB. Hallar el lugar geométrico del punto medio de CD a medida que P se mueve sobre AB.
- Sea ABC un triángulo y P un punto sobre AB. Sea M el punto medio de CP y sea N el punto medio de MA. Hallar el lugar geométrico de N a medida que P se mueve sobre el segmento AB.
- Inventar una construcción que de un lugar geométrico que no sea ni recta, ni segmento, ni circunferencia.
- Dados un punto *P* y los puntos *A* y *B* se construyen los rectángulos *ABCD* con *P* perteneciente a la recta *CD*. Hallar el lugar geométrico de *D* si *B* se mueve en una circunferencia de centro *A*.
- Dada una circunferencia y un punto *P* fuera de ella, encontrar dos puntos *Q* y *R* en la circunferencia tales que *P*, *Q* y *R* estén alineados y *Q* sea el punto medio del segmento *PR*.
- En una circunferencia, dos cuerdas perpendiculares AB y CD se cortan en un punto E de modo que AE = 3, EB = 2, CE = 1 y ED = 6. Hallar el radio de la circunferencia.
- Dibujar un triángulo rectángulo y construir sobre los catetos y sobre la hipotenusa cuadrados, medir las áreas y, utilizando la calculadora, realizar una comprobación empírica del teorema de Pitágoras. Ídem construyendo triángulos equiláteros, hexágonos o cualquier tipo de polígonos construidos sobre los lados con la condición de que sean semejantes.
- Tenemos un triángulo ABC. Demostrar que existe una única circunferencia G que pasa por los tres vértices del triángulo. Esta circunferencia se llama la circunferencia circunscripta al triángulo ABC y su centro se llama el circuncentro del triángulo ABC.

CONCLUSIONES:

Al inicio del trabajo, nos hemos planteado una serie de preguntas que hemos ido estudiando en el desarrollo. A su vez, han surgido nuevos planteos y hemos llegado a ciertas ideas a partir de lo expuesto.

En primera instancia quisiéramos resolver una de ellas: la enseñanza de la Geometría ha quedado, prácticamente al margen de los diseños de Matemática en la escuela media. Por otro lado, se plantean contradicciones en tanto los alumnos deben realizar interpretaciones geométricas, realizar construcciones en otras materias como en Física y en otros talleres que puedan coexistir en Escuelas Técnicas por ejemplo o bien se sienten vacíos al entrar en un nivel académico superior cuando continúan sus estudios. E

Entonces estamos frente a un conflicto: por un lado se demandan los conocimientos en Geometría y por el otro, se abandonan al momento de la clase en sí.

Aquí tenemos, por un lado, un replanteo del programa escolar en donde cristalice esta denuncia y por el otro, nuevas formas de trabajo en el aula que tomen partido de la situación y colaboren a la restauración de los saberes ignorados.

Así es que nos encontramos con entornos de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría, analizando en particular el software Cabrí Geómetra aplicado a lugares geométricos.

Queremos destacar, no obstante, que este recurso informático no es la solución a todos los problemas que la situación engloba, ni por mucho. Es, ni más ni menos que un recurso que puede llegar a facilitar la comprensión de ciertos temas en particular como los aquí tratados.

Erradicamos, de esta manera, toda creencia que suponga suplantar el trabajo, elaboración y seguimiento docente por una herramienta informática, quedando éste regalado a la enseñanza de manejos informáticos o a la aplicación de técnicas.

Por el contrario, el Cabrí una herramienta para el docente de esta nueva era que deberá adaptarse a la incorporación de este a su clase como una nueva posibilidad de experimentación que le pueda dar a la Ciencia un enfoque más dinámico que haga interesante la clase al adolescente. Dicho esto, entonces, podemos afirmar que el Cabrí puede ser un componente que coadyuve a la restauración de la geometría plana en el aula junto con muchos otros factores entre los que se resaltan el compromiso, los recursos y la concientización de los actores educativos.

En este punto, y respondiendo a uno de los planteos iniciales, el factor económico es de gran relevancia. No decimos determinante pues, como ya mencionamos en párrafos anteriores, la enseñanza de la Geometría no depende de este recurso (el estudio de la Geometría es mucho más antiguo que la Computación…). Decimos, entonces, de gran relevancia puesto que si se plantea una propuesta que incluya este tipo de software dinámico se necesita contar con: un laboratorio de informática más o menos actualizado donde se pueda trabajar en grupos de a lo sumo tres alumnos y un software legal por cada máquina (aproximadamente las licencias para más de 15 unidades rondan los 60Us$ cada una). Como se puede ver, estamos hablando de una inversión considerable con la que debe contar la Institución y que muchas veces coarta este tipo de proyectos.

Por todo esto consideramos lo siguiente respecto a la enseñanza de la Geometría en escuela media:

- El Cabrí es una herramienta muy sencilla y dinámica para la enseñanza de la Geometría y requiere de un manejo mínimo de conceptos informáticos que hasta pueden ser aprendidos con su uso.
- El soporte teórico es fundamental y necesario para uso, debe ser bastante fluido y claro. Entonces sí, este recurso resulta realmente una herramienta para el aula, de lo contrario puede llevar a confusiones y mal interpretaciones.
- La restauración de la enseñanza de la Geometría puede estar signada por una equilibrada combinación de lo que los dos ítems previos proponen. Resaltamos que su uso no es imprescindible pero que puede ser de gran ayuda tanto al docente como a los estudiantes.

Respecto a la enseñanza, en particular, de lugares geométricos:

- El Cabrí, para este tema, exige un manejo muy fluido de dos cosas; el fundamento teórico subyacente y conocimientos más elaborados no tanto de informática sino del uso de este software.
- Se requiere, de igual manera, lo previamente citado para el profesor que va a ser muchas veces de guía para las construcciones.
- Respecto a las cónicas en particular, es bastante dificultoso y a veces confuso la forma en que esos lugares geométricos se deben definir para que el software interprete. No obstante, esto se compensa con todos los otros lugares geométricos que hemos expuesto en el trabajo que, de realizarse con lápiz y en papel sería casi imposible obtener los resultados que se obtienen con Cabrí.
- Respecto de lo que señalamos antes, el Cabrí permite dibujar, animar y extender gran cantidad de lugares geométricos que son muy poco conocidos por la escuela media y que resultan por demás llamativos y pueden interesar al adolescente.

Respecto al Cabrí, en particular como recurso de una clase:

- Da la posibilidad al alumno de poder llevar a un plano empírico que le sirve como una primera instancia para alcanzar el pensamiento formal. El alumno puede trabajar de forma directa con los objetos que estudia, experimentar, sacar primeras conjeturas y luego elevarse a la formalidad con el sustento teórico correspondiente para probar o refutar las mismas. Puede aprender, también de su propio error y es un entorno que puede facilitar el trabajo en grupo.
- Como todo componente informático, tiene sus falencias en tanto depende no sólo de corriente eléctrica para funcionar sino del nivel de actualización que tiene la computadora en que se trabaje. A su vez corre riesgos serios de que se pierda la información, o bien, si no es guardado en la forma en que el docente indica, puede ser vulnerado por otros integrantes de la escuela.

- En contraposición a lo que acabamos de mencionar, le da la posibilidad al alumno de tener construcciones mucho más precisas y atractivas a la vista que puedan incentivar su trabajo y perfeccionamiento.
- Ofrece una combinación de aprendizajes geométricos en la medida que son también informáticos.
- Otorga la posibilidad al docente de hacer un seguimiento de la tarea de sus alumnos, así como de su evolución, al poder tener en muy poco espacio y de una forma trasladable la resolución de las consignas que propuso en clase. Da la posibilidad de hacer una revisión de las construcciones paso a paso para poder, así, rescatar los errores más comunes y retomarlos en el aula.
- Incentiva al docente a actualizar sus conocimientos en función de la informática. Requiere de voluntad y deseos de capacitación para poder estar a tono de las nuevas tecnologías y hacer una selección crítica de sus posibles usos.

BIBLIOGRAFÍA:

Mucha bibliografía ha sido recopilada y seleccionada críticamente a través de artículos de divulgación matemática en Internet. Los aportes propiamente matemáticos han sido extraídos de ediciones impresas y libros.

Incluimos, a su vez, bibliografía consultada como utilizada o citada.

- "Complementos de geometría y trigonometría analítica" – Carvajal, Leonor – Enciclopedia Británica – 2000
- "Matemática 2" – Tapia, Carlos Alberto – Editorial Estrada – 1986
- "Didáctica de la Matemática" – Vilella, José – Jorge Baudino Editores – 2004
- "Matemática...¿Estás ahí? (Episodios 1 y 2) – Paenza, Adrián – Siglo veintiuno editores – 2006
- "Integración y viabilidad de objetos informáticos en la enseñanza de la Matemática" – Chevallard, Yves – Apunte propuesto en clase
- "Cabrí-Geómetra: o una nueva relación con la Geometría" – Laborde, Colette – Apunte propuesto en clase
- "De la calle al ordenador" – Mora Sánchez, José Antonio - 1996
- http://aportes.educ.ar
- http://aulafacil.com
- http://es.wikipedia.org
- http://cabri.com/es
- http://centros5.pntic.mec.es
- http://eureka.ya.com
- http://wmatem.eis.uva.es
- http://uam.es

- http://oma.org.ar
- http://geometriadinamica.cl
- http://books.google.es
- https://pentagono.uniandes.edu.co
- http://matematicas.net
- http://buenosaires.gov.ar