



Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
Secretaría de Educación

JORNADAS VIRTUALES

en el
Instituto Superior del Profesorado
Dr. Joaquín V. González



REGISTRO DE REPRESENTACIÓN DE CONTENIDOS. UN ESTUDIO SOBRE ITERACIONES

Lic. Fabián Valiño
Inst. Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”, Argentina
Secundaria Ciclo Superior- Terciario

Resumen

Los procesos iterativos constituyen una metodología de trabajo dentro de la ciencia matemática que tuvieron múltiples usos en las épocas en que no existían calculadoras sofisticadas o computadoras para facilitar cálculos. Revalorizar su importancia y utilizarlos para recrear contenidos del nivel polimodal puede ser significativo hasta incluso para aproximar soluciones de ecuaciones “no tradicionales”. En esta comunicación se propondrán algunos contenidos que presentados a partir de fórmulas iterativas tales como las sucesiones aritméticas, las sucesiones geométricas, la sucesión de Fibonacci y otros que únicamente pueden ser abarcados mediante estos procedimientos tales como el proceso iterativo de Newton-Raphson etc., auxiliados con recursos tecnológicos adecuados que complementan e ilustran estas cuestiones. Se aproximarán raíces cuadradas también de manera iterativa, un procedimiento histórico ya conocido por los babilonios y finalmente se mostrarán algunos ejemplos de resolución de ecuaciones empleando este método.

Los procesos iterativos

Los procesos iterativos tienen ciertas características que le son propias y que se caracterizan de alguna manera por dos aspectos fundamentales:

- ✓ Una fórmula funcional compuesta y un valor inicial de la variable que define unívocamente el valor que toma la función para el valor siguiente.
- ✓ La imagen que se obtiene en cada iteración permite retroalimentar el proceso.

Veamos algunos ejemplos básicos de estos procesos:

1. Sucesiones aritméticas

Sea por ejemplo la función definida de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 2 \end{array} \right.$$

Prohibida su reproducción total o parcial de este trabajo sin autorización de el/los autor/es.
Registrado y depositado en la Dirección Nacional del Derecho de Autor.

$$a_{n+1} = a_n - 3$$

La función define una sucesión $a_0; a_1; a_2; a_3; \dots$ cuyo primer término es $a_0 = 2$. Veamos cómo obtener el segundo término. Para obtener el a_1 debemos reemplazar n por 0 así si $n=0$ entonces $a_{n+1} = a_1$ con lo cual:

Es decir que $a_1 = a_0 - 3$; $a_1 = 2 - 3$; $a_1 = -1$.
El tercer término se obtiene recursivamente ya que cuando $n=1$ entonces

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - 3 \\ a_2 &= -1 - 3 \\ a_2 &= -4 \end{aligned}$$

Del mismo modo pueden obtenerse los siguientes términos de la sucesión:

$$2; -1; -4; -7; -10; \dots$$

Este proceso iterativo permite generar una **sucesión aritmética** de diferencia -3 . Esta fórmula permite conocer cualquier término de la sucesión conocido el primero y la diferencia. Pueden surgir varias preguntas tales como: ¿Cómo pueden entonces vincularse ambas fórmulas que generan la misma sucesión? ¿Qué papel cumple cada uno de sus componentes? Este proceso puede conducir a una interesante fuente de conjeturas que permitan transformar una función en otra y viceversa.

2. Sucesiones geométricas

Veamos otra aplicación de las iteraciones que permite introducir un nuevo contenido conceptual. Sea por ejemplo la fórmula iterativa definida del siguiente modo:

$$\begin{cases} b_0 = 5 \\ b_{n+1} = 0,2 \cdot b_n \end{cases}$$

La fórmula así definida genera la sucesión:

$$5; 1; 0,2; 0,04; 0,008; 0,0016; \dots$$

Se trata de una **sucesión geométrica** de razón $1/5$. En este tipo de sucesiones puede ser interesante explorar como conjeturas el efecto que tiene el coeficiente que multiplica a b_n , variando sus valores por números mayores o menores que 1.

Podemos deducir que la fórmula iterativa:

$$\begin{cases} c_0 = 5 \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

genera una sucesión geométrica de razón 3..

3. Otras sucesiones arbitrarias

La **sucesión de Fibonacci** se define de manera recursiva según la siguiente fórmula:

$$\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \end{cases}$$

Según esta fórmula los dos primeros términos de la sucesión son 1 y 1. El tercer término $f_2 = f_1 + f_0 = 2$ y así sucesivamente obtenemos:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 610; 987; ...

También es conocido el hecho que dividiendo dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci generamos otra sucesión que converge al número de oro ϕ . En efecto,

$$\begin{aligned} 1:1 &= 1 \\ 2:1 &= 2 \\ 3:2 &= 1,5 \\ 5:3 &= 1,666... \\ 8:5 &= 1,933... \\ 13:8 &= 1,625 \\ 21:13 &= 1,6153846... \\ &\dots \\ 987:610 &\cong 1,618032787 \end{aligned}$$

El número de oro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional. Su expresión decimal con diez cifras significativas corregidas es 1,618033989. Incluso el número irracional $\sqrt{5}$ puede ser calculado mediante un proceso iterativo. Podemos primeramente ensayar con nuestros alumnos alguna fórmula iterativa. Sabemos que necesitamos un valor inicial al que hemos denominado x_0 y una fórmula recursiva. Encontrar el valor inicial no es demasiado complicado (en este ejemplo); en efecto, los alumnos saben que:

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

por lo que $x_0 = 2$ soluciona el problema. Ensayemos entonces alguna fórmula recursiva. Si

$x^2 = 5 \Rightarrow |x| = \sqrt{5}$ en efecto, $x = \sqrt{5}$ es una solución de esta ecuación. Escribamos entonces:

$$x \cdot x = 5$$

Con lo cual, $x = \frac{5}{x}$ (Esto es posible pues $x \neq 0$, en efecto buscamos $x = \sqrt{5}$)

Una fórmula recursiva quedaría entonces definida así:
$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{5}{x_n} \end{cases}$$

Es sencillo darse cuenta de que esta fórmula no es útil ya que se obtiene la sucesión oscilante 2; 2,5; 2; 2,5; 2;

Probemos entonces con algún otro procedimiento. Partimos nuevamente de que

$$x = \frac{5}{x} \quad (\text{Esto es posible pues } x \neq 0)$$

Ahora bien $x = x$ por idempotencia de la relación de igualdad
Sumando miembro a miembro obtenemos:

$$2x = \frac{5}{x} + x \quad (x \neq 0)$$

lo que equivale a:

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{x} + x \right) \quad (x \neq 0)$$

La fórmula recursiva estará dada entonces por la expresión:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{x_n} + x_n \right) \quad (x_n \neq 0) \end{array} \right.$$

Aplicando en forma recursiva esta fórmula obtenemos la sucesión: 2; 2,25; 2,2361111...; 2,236067978...; 2,236067977...; 2,236067977... y a partir de aquí se repiten los términos dadas las cifras significativas que podemos obtener por calculadora.

4. El Método de Newton-Raphson

Podemos pensar en la función f definida así:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 5$$

La gráfica de esta función es una parábola cuyos ceros son $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$.

Si consideramos la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x_0 = 2$, necesitamos entonces conocer la pendiente de esta recta. Dado que la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada de la función evaluada en ese punto podemos calcular entonces fácilmente la pendiente:

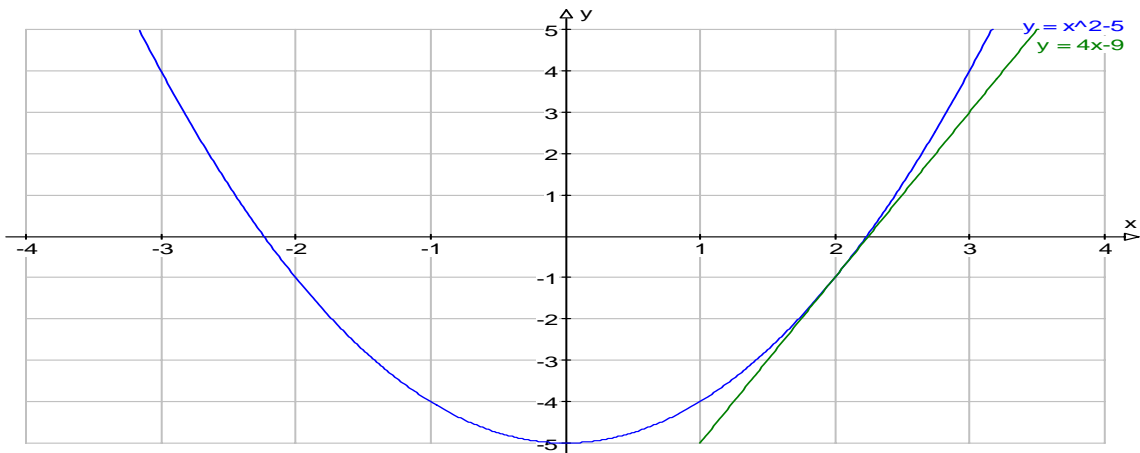
$$f'(x) = 2x \quad \text{con lo cual } f'(2) = 4$$

La ordenada correspondiente a la abscisa $x_0 = 2$ es $y_0 = -1$. Con todos estos datos podemos obtener la ecuación de la recta buscada. Así:

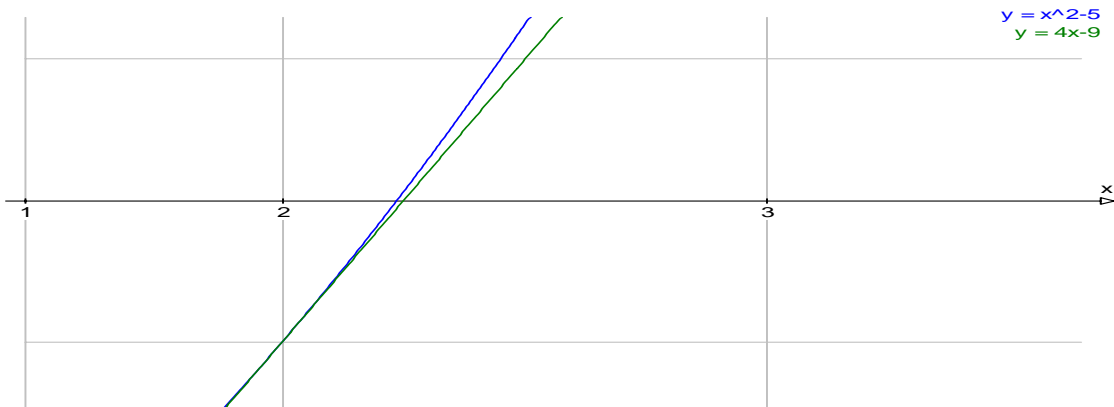
$$\begin{aligned} y - (-1) &= 4 \cdot (x - 2) \\ y &= 4x - 9. \end{aligned}$$

Operando resulta que

Observamos curiosamente que la intersección de esta recta con el eje de abscisas es el punto $x_1 = 2,25$. Este número coincide con el segundo valor obtenido al aplicar la fórmula recursiva. Veamos en un gráfico qué es lo que ha sucedido:



El cero de la recta $y = 4x - 9$ está más próximo al cero de la función cuadrática que el valor $x_0 = 2$. Al aplicar un zoom que amplíe esa zona obtenemos:



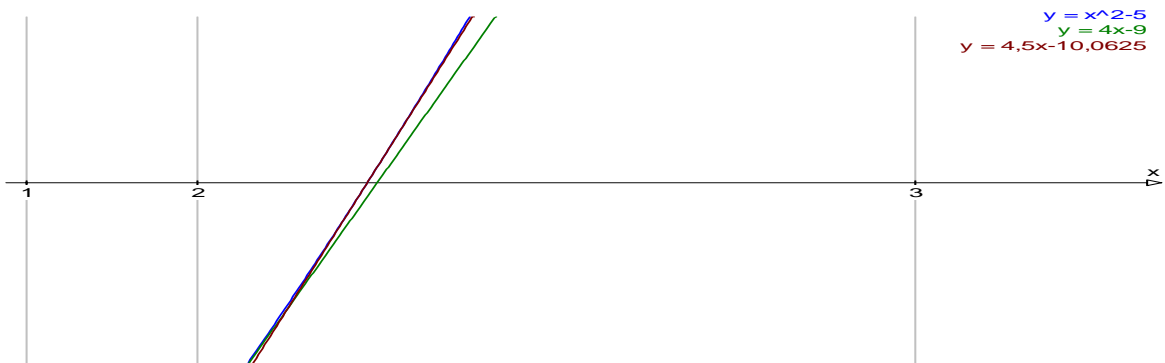
Repetimos nuevamente este proceso. Esta vez, en lugar de utilizar el valor $x_0 = 2$, repetiremos el proceso con $x_1 = 2,25$. Hallamos $f(2,25) = 0,0625$ y $f'(2,25) = 4,5$. En estas condiciones la ecuación de la recta tangente a la parábola en $x = 2,25$ será:

$$y - 0,0625 = 4,5(x - 2,25)$$

$$y = 4,5x - 10,0625$$

o también

Veamos ahora el efecto de esta recta sobre el gráfico anterior:



Como vemos, esta segunda recta interseca al eje de abscisas prácticamente en la raíz de la función cuadrática. Debemos hacer notar a nuestros alumnos que los procedimientos gráficos son muy ilustrativos pero bastante imprecisos en cuanto a exactitud de aproximación. Muchos alumnos estarán tentados de afirmar que ya hemos encontrado la raíz pues ambas, parábola y recta coinciden en el eje de abscisas. Por eso es aconsejable que los alumnos calculen el cero de esta nueva función lineal. Así:

$$0 = 4,5x - 10,0625$$

Con lo cual
$$x = \frac{10,0625}{4,5}$$

O sea
$$x = 2,236111\dots$$

Esta cifra coincide con el tercer término de la sucesión obtenida al aproximar $\sqrt{5}$.

Trataremos ahora de generalizar este proceso, para lo cual trabajaremos con la ecuación de la primera recta obtenida.

$y - (-1) = 4 \cdot (x - 2)$ fue la ecuación de la recta tangente en $x_0 = 2$
 Pero $-1 = f(x_0)$; $4 = f'(x_0)$ y $2 = x_0$. Reemplazando obtenemos:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

En el eje de abscisas $y = 0$ por lo cual $-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
 Que es equivalente a decir $f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0) = x \cdot f'(x_0)$

Dividiendo miembro a miembro por $f'(x_0)$ obtenemos: $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x$

Dado que a este valor lo hemos denominado primera aproximación podemos escribir así:

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

Y, en general, la fórmula iterativa estará dada por:

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$$

Al reemplazar esta fórmula por $f(x) = x^2 - 5$ y $f'(x) = 2x$ obtenemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$$

Operando resulta que:
$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 5}{2x_n}$$

Reduciendo términos
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 5}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$

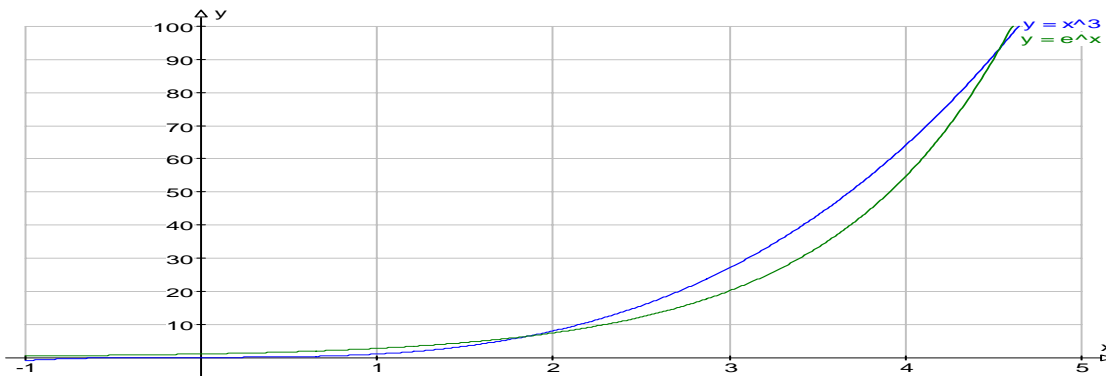
Esta última expresión coincide con nuestra fórmula inicial para el cálculo iterativo de $\sqrt{5}$.

5. Resolución de ecuaciones “no tradicionales”

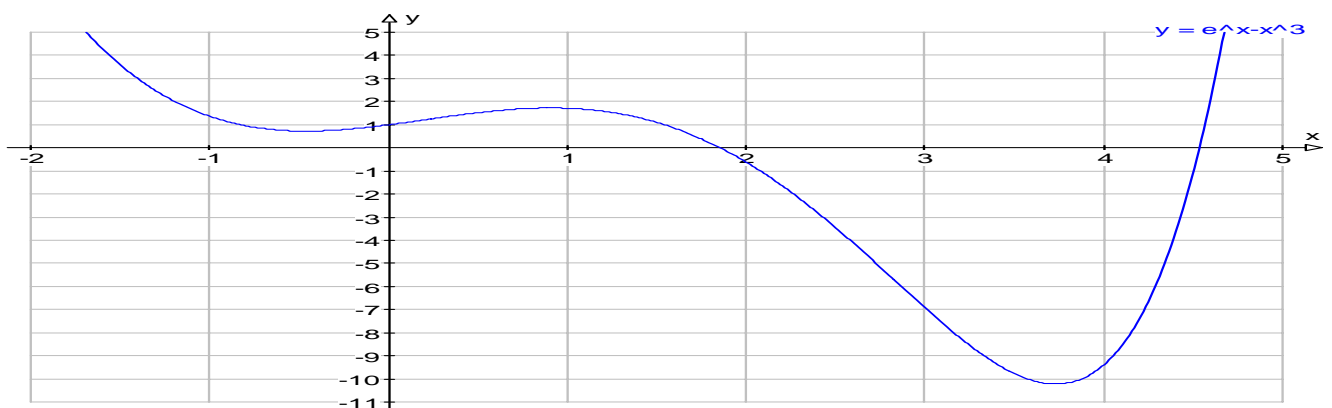
Este método puede aplicarse por ejemplo en la **resolución de una ecuación** del tipo:

$$e^x = x^3$$

En efecto, esta ecuación no puede resolverse por métodos “tradicionales” conocidos de “despejar” x . En efecto podemos comprobar gráficamente que existen dos soluciones para esta ecuación:



Si consideramos ahora la función $f(x) = e^x - x^3$ vemos que existe un cero entre $x = 1$ y $x = 2$ y otro cero entre $x = 4$ y $x = 5$. Puede ser interesante aquí ilustrar con el teorema de Bolzano-Weierstrass esta situación.

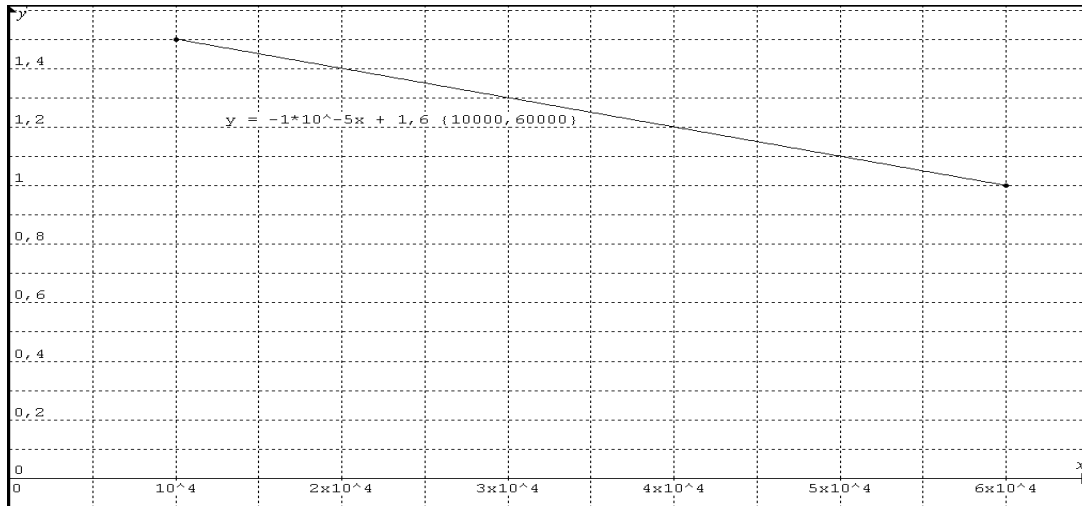


Aplicando la fórmula iterativa de Newton- Raphson para valor inicial $x_0 = 2$ se obtiene la siguiente sucesión de valores $x_0 = 2$; $x_1 = 1,8675015337\dots$; $x_2 = 1,857247007\dots$; $x_3 = 1,857183863\dots$; $x_4 = 1,85718386\dots$ y $x_5 = 1,85718386\dots$ con lo cual podemos afirmar que una solución de la ecuación dada es $x = 1,85718386$ con 9 cifras significativas corregidas.

Del mismo modo puede calcularse la otra solución entre 4 y 5 ($x \cong 4,536403655$). Cabe destacar que puede ser objeto de investigación por parte de los alumnos los motivos por los que al utilizar $x_0 = 1$ se obtiene la otra solución de esta ecuación.

6. Funciones logísticas

Supongamos que 10.000 peces son introducidos en un lago y que la tasa de crecimiento de esa población sea del 50%. A largo plazo buscamos que la población se estabilice en aproximadamente unos 60.000 peces. ¿Cuál es el modelo matemático que permite resolver esta situación? Los datos que obtenemos de la situación son $P_0=10.000$; $P_n=60.000$ y una razón inicial de crecimiento del 50%, es decir $r_0= 1,50$ con una $r_n= 1$ que muestra estabilidad. Gráficamente podemos representar esta situación así:



Ahora bien, podemos pensar que la población en un momento P_{n+1} sea igual al producto entre la razón de crecimiento y la población en un momento P_n , es decir:

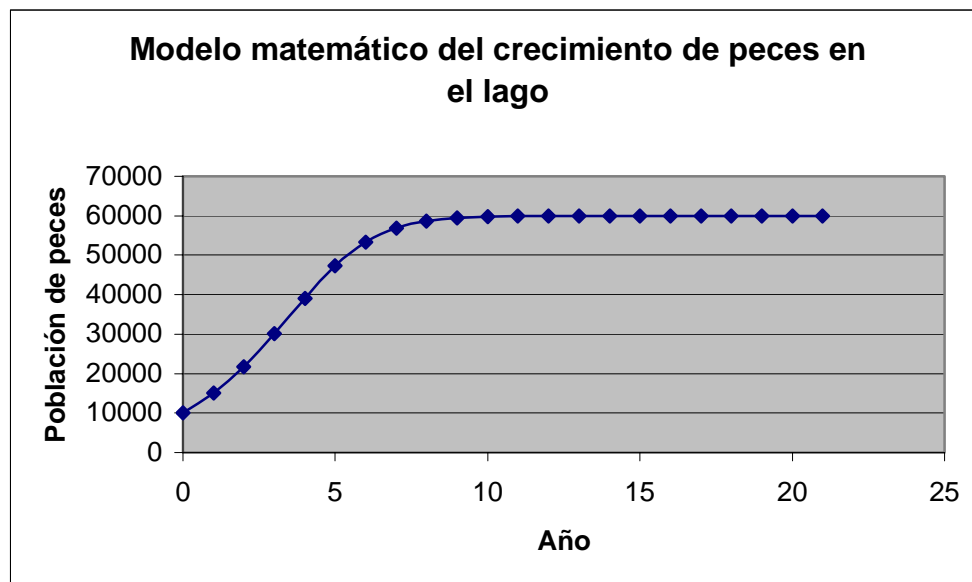
$$P_{n+1} = r \cdot P_n = (-1 \times 10^{-5} P_n + 1,6) \cdot P_n$$

Usando Excel podemos vislumbrar los resultados de esta función para distintos valores de n.

Año	Población de peces
0	10000
1	15000
2	21750
3	30069
4	39069
5	47247
6	53272
7	56856
8	58644
9	59439
10	59772
11	59908
12	59963
13	59985
14	59994
15	59998

16	59999
17	60000
18	60000
19	60000
20	60000
21	60000

La gráfica de la tabla queda representada de este modo:



Conclusiones

En esta comunicación se ha intentado mostrar que los procesos iterativos permiten introducir contenidos altamente significativos en la enseñanza de nuestros alumnos. Las aplicaciones mostradas en este trabajo son sólo ejemplos básicos; de hecho, también las cuestiones más sencillas que pueden ser trasladadas al aula acerca de la geometría fractal, son procesos iterativos que pueden ser profundizados por alumnos aventajados que deseen incursionar en iteraciones con funciones de variable compleja. Otro proceso iterativo muy interesante desde el punto de vista del cálculo lo constituye la iteración de punto fijo donde se debe reordenar una ecuación de modo que puedan estudiarse la o las intersección/es con la función identidad $y=x$.

Cabe destacar la importancia del uso de tecnología adecuada tales como software para graficar funciones, calculadoras de pantalla gráfica, etc. para poder llevar a cabo estos procesos tan integradores y ricos en tópicos matemáticos.

Bibliografía

- BOSTOCK L. & CHANDLER, S. *Pure Mathematics I & II*. Avon, Stanley Thornes (publishers) Ltd., 1993.
- MATHEWS, J. & FINK, C. *Métodos numéricos con MATLAB*. Madrid, Prentice Hall, 2000.
- PERKINS M. & PERKINS P., *Advanced mathematics*. London, Collins Educational, 1993.

