



Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires  
Secretaría de Educación

# JORNADAS VIRTUALES

en el  
Instituto Superior del Profesorado  
Dr. Joaquín V. González



## La geometría dice Presente

### Recursos “no convencionales” para la clase de GEOMETRÍA

- (a) Autor: Prof. José Luis **TILARO**  
Escuelas donde trabajo: Escuela de Educación Media Nº 1 “Rodolfo Walsh”  
E.S.B. El Principito  
Instituto Superior de Formación Docente y Técnica Nº 81  
Ciudad: Miramar  
Provincia: Buenos Aires

(b) Resumen del Trabajo:

Dice Ana Bressan: **“La Geometría aparece en los currículos actuales de educación matemática con renovado vigor, sin embargo éste no se transmite en su enseñanza en las aulas”**, y luego da una serie de motivos y explicaciones para fundamentar esta realidad que describe, entre los cuales incluye las dificultades planteadas en el abordaje didáctico de la geometría, debido a que no hay muchos trabajos al respecto y los que hay están poco divulgados entre los docentes.

Con este trabajo se pretende compartir algunas ideas en torno la problemática, que se fue armando a partir de la consulta bibliográfica acerca del tema en diferentes lugares y, de muchos años de trabajo en las escuelas.

Todas las actividades que incluyo tienen el respaldo de haber sido llevadas a la práctica con resultados sumamente satisfactorios, ya sea porque permitieron presentar o afianzar vocabulario propio de la geometría; porque favorecieron la visualización de un concepto o una propiedad; porque tuvieron efecto motivador aún en aquellos alumnos más difíciles de movilizar que se sintieron desafiados por alguna propuesta que les resultó ingeniosa; porque permitió articular conceptos de aritmética o álgebra con geometría; porque favorecieron el trabajo en equipo, la discusión, la autoestima; porque alentaron la formulación de hipótesis; por que brindaron nuevas herramientas para la resolución de

*problemas, y, en general, porque le dieron a la clase de geometría una dinámica que no es fácil de lograr con el enfoque tradicional.*

(c) Índice de contenidos:

(1) Fundamentación

(2) Marco teórico

(3) Contenidos curriculares abordados

(4) Destinatarios

(5) Actividades y recursos

(6) Bibliografía

**(1) Fundamentación**

En el año 1994 participé, por ser profesor de matemática del I.S.F.D. N° 81, de un proyecto de Capacitación Docente en las didácticas especiales, en mi caso particular el área de Matemática<sup>1</sup>.

En esos encuentros trabajamos bibliografía relacionada con el aprendizaje de la matemática a partir de la resolución de problemas<sup>2</sup>, los modelos de aprendizaje de la matemática, y otras cuestiones, que me resultaron novedosas e interesantes y comencé a buscar más material en relación a esa temática.

En este trabajo, pretendo compartir con otros docentes algunas actividades relacionadas con el aprendizaje escolar de la geometría, que, a mi juicio, permiten enfocar a esta parte de la matemática desde la resolución de problemas y que me han servido como estrategia para lograr un acercamiento distinto hacia conceptos y actividades propios de la geometría, que van más allá de la construcción de figuras y la aplicación de fórmulas, y que, además, tienen el mérito de conseguir una participación más activa y entusiasta de los alumnos.

**(2) Marco teórico**

Las actividades que presento en este trabajo están encuadradas, a mi entender, en las propuestas de los libros:

- **Razones para enseñar geometría en la E.G.B.**<sup>3</sup>, donde las autoras se refieren a las habilidades que una buena enseñanza de la geometría en la educación básica debería ayudar a desarrollar, que son: visuales, verbales, de dibujo, lógicas y de aplicación.
- **Geometría y su didáctica para maestros**<sup>4</sup>, donde el autor se refiere al trabajo desarrollado por Pierre van Hiele y Dina van Diele-Geldof para comprender y orientar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes. El modelo teórico conocido como de “los niveles de van Hiele” que comenzó a proponerse en 1959 y que continúa siendo útil para organizar el currículo de geometría en la educación primaria y secundaria. Según el autor,

---

<sup>1</sup> La capacitación fue organizada por la D. G. E. y C. de la Pcia. de Buenos Aires coordinada por las Prof. Mirta S. Andrada y Mónica M. Salgado y se convocaba a un docente de Matemática del Nivel Primario y a un Profesor del Área de Matemática del Profesorado de cada distrito.

<sup>2</sup> Parra, Cecilia y Saiz, Irma (Comps.)(1994): “**Didáctica de Matemáticas-Aportes y reflexiones**”. Cap.III. Edit. Paidós. Buenos Aires.

<sup>3</sup> Bressan, Ana María y otras (2000): **Razones para enseñar geometría en la E.G.B.** Edic. Novedades Educativas. Buenos Aires.

<sup>4</sup> Godino, Juan D. y otro (2003): **Geometría y su didáctica para maestros**. Proyecto Edumat. Univ. De Granada.

en este modelo se proponen cinco niveles jerárquicos para describir la comprensión y el dominio de las nociones y habilidades espaciales. Cada uno de los cinco niveles describe procesos de pensamiento que se ponen en juego ante tareas y situaciones geométricas. En particular, para este trabajo, interesa caracterizar los niveles 0, 1 y 2.

### ► **Nivel 0: Visualización**

Los objetos de pensamiento en el nivel 0 son formas y se conciben según su apariencia.

Los alumnos reconocen las figuras y las nombran basándose en las características visuales globales que tienen. Los alumnos que razonan según este nivel son capaces de hacer mediciones e incluso de hablar sobre propiedades de las formas, pero no piensan explícitamente sobre estas propiedades. Lo que define una forma es su apariencia. Un cuadrado es un cuadrado “porque se parece a un cuadrado”. Debido a que la apariencia es el factor dominante en este nivel, esta apariencia puede llevar a atribuir propiedades impertinentes a las formas. Por ejemplo, un cuadrado que se ha girado  $45^\circ$  respecto de la vertical puede que no se considere un cuadrado por un sujeto de este nivel. “Pongo estas formas juntas porque tienen el mismo aspecto”, sería una respuesta típica.

Los productos del pensamiento del nivel 0 son clases o agrupaciones de formas que parecen ser “similares”.

### **Características de las actividades del Nivel 0**

- Actividades de clasificación, identificación y descripción de formas variadas.
- Uso de gran cantidad de modelos físicos que se pueden manipular por los niños.
- Ejemplos de una variedad de formas diferentes con objeto de que las características irrelevantes no se perciban como importantes.
- Proporcionar oportunidades para que los alumnos construyan, dibujen, compongan o descompongan formas diversas.

### ► **Nivel 1: Análisis**

Los objetos de pensamiento en el nivel 1 son clases de formas, en lugar de formas individuales.

Los estudiantes que razonan según este nivel son capaces de considerar todas las formas incluidas en una clase en lugar de una forma singular. En lugar de hablar sobre este rectángulo, es posible hablar sobre todos los rectángulos. Al centrarse en una clase de formas, los alumnos son capaces de pensar sobre lo que hace que un rectángulo sea un rectángulo (cuatro lados, lados opuestos paralelos y de la misma longitud, cuatro ángulos rectos, diagonales congruentes, etc.). Las características irrelevantes (como el tamaño o la orientación) pasan a un segundo plano. Los estudiantes comienzan a darse cuenta de que una colección de formas pertenece a la misma clase debido a sus propiedades. Si una forma pertenece a la clase de los cubos, tiene las propiedades correspondientes a esa clase. “Todos los cubos tienen seis caras congruentes, y cada una de estas caras es un cuadrado”. Estas propiedades estaban como implícitas en el nivel 0. Los sujetos del nivel 1 pueden ser capaces de listar todas las propiedades de los cuadrados, rectángulos, y paralelogramos, pero no ver las relaciones de inclusión entre estas clases, que todos los cuadrados son rectángulos y todos los rectángulos son paralelogramos. Cuando se les pide que definan una forma, es probable que listen todas las propiedades que conozcan.

Los productos del pensamiento del nivel 1 son las propiedades de las formas.

### **Características de las actividades del Nivel 1**

- Comenzar a centrar la atención más sobre las propiedades de las figuras que en la simple identificación. Definir, medir, observar y cambiar las propiedades con el uso de modelos concretos.
- Resolver problemas en los que las propiedades de las formas sean aspectos importantes a tener en cuenta.
- Seguir utilizando modelos concretos, como en las actividades del nivel 0, pero usando modelos que permitan la exploración de diversas propiedades de las figuras.
- Clasificar figuras usando las propiedades de las formas como también sus nombres. Por ejemplo, encontrar propiedades de los triángulos que hagan que unos sean similares y otros diferentes.

### ► **Nivel 2: Deducción informal**

Los objetos del pensamiento del nivel 2 son las propiedades de las formas.

A medida que los estudiantes comienzan a ser capaces de pensar sobre propiedades de los objetos geométricos sin las restricciones de un objeto particular, son capaces de desarrollar relaciones entre estas propiedades. “Si los cuatro ángulos son rectos, la figura es un rectángulo. Si es un cuadrado, todos los ángulos son rectos. Si es un cuadrado, entonces debe ser un rectángulo”. Con una mayor capacidad de usar el razonamiento “si – entonces”, las figuras se pueden clasificar usando sólo un mínimo de características. Por ejemplo, cuatro lados congruentes y al menos un ángulo recto puede ser suficiente para definir un cuadrado. Los rectángulos son paralelogramos con un ángulo recto. Las observaciones van más allá de las propias propiedades y comienzan a centrarse en argumentos lógicos sobre las propiedades.

Los estudiantes del nivel 2 serán capaces de seguir y apreciar un argumento deductivo informal sobre las formas y sus propiedades. “Las demostraciones” pueden ser más de tipo intuitivo que rigurosamente deductivas. Sin embargo, se entiende que un argumento lógico tiene características que obligan a aceptar la conclusión. La comprensión de la estructura axiomática de un sistema deductivo formal no llega a alcanzarse.

Los productos de pensamiento del nivel 2 son relaciones entre propiedades de los objetos geométricos.

### **Características de las actividades del Nivel 2**

- Continuar usando propiedades de los modelos, pero con la atención puesta en la definición de propiedades. Hacer listas de propiedades y discutir qué propiedades son necesarias y cuáles son condiciones suficientes para una forma o concepto específico.
- Comenzar a usar un lenguaje de naturaleza deductiva aunque informal: todos, algunos, ninguno, si entonces, qué ocurre si, etc.
- Investigar la validez de la inversión de ciertas relaciones. Por ejemplo, el enunciado inverso de “Si una figura es un cuadrado debe tener cuatro ángulos rectos” sería, “Si tiene cuatro ángulos rectos, entonces debe ser un cuadrado”.
- Usar modelos y dibujos como herramientas con las que pensar, y comenzar a buscar generalizaciones y contraejemplos.
- Estimular la formulación y demostración de algunas hipótesis.

### **Características de los niveles**

1. Los niveles son secuenciales. Para lograr un cierto nivel superior al 0 los alumnos deben superar los niveles previos. Esto implica que el sujeto ha experimentado el pensamiento geométrico apropiado para ese nivel y ha creado en la propia mente los tipos de objetos o relaciones que son el foco de atención del pensamiento del nivel siguiente.

2. Los niveles no son dependientes de la edad en el sentido de los estadios de desarrollo de Piaget. Un alumno de tercero de primaria puede estar en el nivel 0 al igual que uno de bachillerato. Algunos estudiantes y adultos pueden permanecer siempre en el nivel 0, y un número importante de personas adultas no alcanzan nunca el nivel 2. Sin embargo, la edad está relacionada con la cantidad y tipo de experiencias geométricas que tenemos. Por tanto, es razonable aceptar que todos los niños de preescolar a 2º curso de primaria estén en el nivel 0, así como que la mayoría de los niños de 3º y 4º.

3. La experiencia geométrica es el principal factor que influye en la progresión de niveles. Las actividades que permiten a los niños explorar, hablar sobre las experiencias, e interactuar con el contenido del siguiente nivel, además de incrementar sus experiencias con el nivel en que se encuentran, proporcionan la mejor oportunidad de avanzar hacia el siguiente nivel.

4. Cuando la instrucción o el lenguaje usado está a un nivel superior al que tiene el estudiante, habrá un fallo en la comunicación. Los estudiantes a los que se pide enfrentarse con objetos de pensamiento que no han construido en el nivel anterior pueden ser forzados a un aprendizaje memorístico y alcanzar sólo temporalmente un éxito superficial. Un estudiante puede, por ejemplo, memorizar que todos los cuadrados son rectángulos sin haber construido esa relación, o bien puede memorizar una demostración geométrica pero fallar en crear los pasos exigidos o comprender la razón de ser del proceso.

### **(3) Contenidos curriculares abordados**

En las actividades que propongo en este trabajo pueden abordarse con distinto grado de profundidad, y en distintos momentos del proceso, los contenidos que cito a continuación:

- Sistemas de referencia para la ubicación de puntos en el plano. Lectura y representación de puntos.
- Posiciones relativas de rectas en el espacio.
- Figuras: propiedades, elementos, relaciones. Construcciones con regla y compás.
- Relaciones entre propiedades de figuras y/o cuerpos y entre figuras o cuerpos entre sí.
- Reconocimiento, clasificación, reproducción, construcción y representación de formas planas y espaciales sencillas.
- La utilización de instrumentos de medición y de geometría.
- La elaboración de estrategias personales para llevar a cabo mediciones.
- Movimientos: simetrías, traslaciones y rotaciones en el plano. Propiedades de los mismos. Composición de simetrías, traslaciones y rotaciones en el plano. Propiedades de los mismos.
- La utilización de propiedades de los movimientos en la clasificación, generación, ampliación, reducción y análisis de figuras.

- Áreas de figuras. Estrategias de cálculo. Fórmulas.
- La elaboración de estrategias de enumeración exhaustiva en el tratamiento de problemas.
- Cuerpos: propiedades, elementos, relaciones.
- Teorema de Pitágoras.
- Área de cuerpos. Volumen de cuerpos. Estrategias de cálculo. Fórmulas.
- Relaciones entre perímetro, área y volumen.
- Lenguaje algebraico.

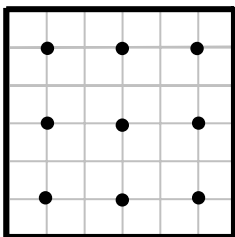
#### (4) Destinatarios

Estas actividades se han trabajado con alumnos de 7º, 8º y 9º de la E.G.B. El Principito (que a partir del 2006 se llama E.S.B.) y con alumnos de 1º, 2º y 3º año del Bachillerato para Adultos de la Escuela de Educación Media N° 1 “Rodolfo Walsh”, ambas instituciones de la ciudad de Miramar.

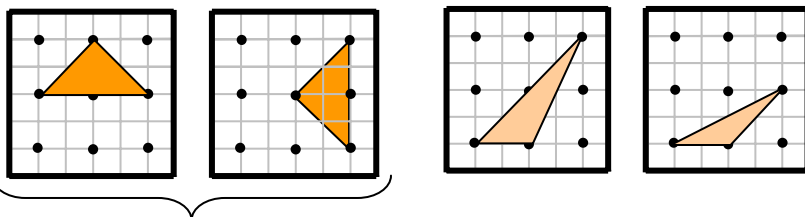
#### (5) Actividades y recursos

##### ► Geoplanos de papel

Es un material económico, fácil de reproducir ya que se puede llevar fotocopiado o lo pueden hacer los alumnos en el momento en la hoja de carpeta, y que permite realizar múltiples actividades, de diverso grado de dificultad y, en general, muy movilizadoras. Cuando se utiliza un geoplano para representar polígonos, los vértices de esas figuras deben ubicarse sobre los puntos del geoplano.

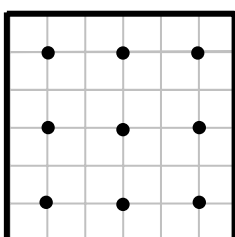


- Utilizando un geoplano de 3x3 es posible representar ocho triángulos distintos. Pueden ser diferentes por la clase o por las medidas pero no por la ubicación. Encontralos y clasificalos según los lados y según los ángulos.

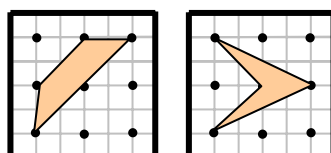


*Es el mismo triángulo en otra posición.  
Se cuenta como uno solo.*

*Si los alumnos conocen Pitágoras podemos ordenar los ocho triángulos por su perímetro, o podemos hacer ordenar los triángulos por su perímetro y después presentar Pitágoras para comprobar si fue correcto el ordenamiento.*



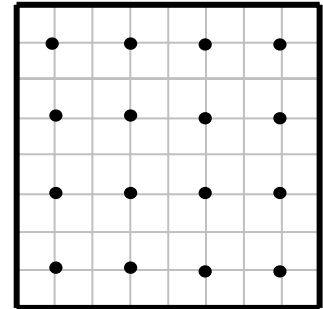
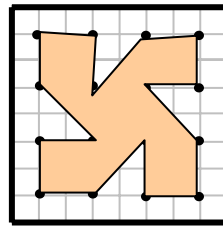
- Utilizando un geoplano de 3x3 es posible representar ocho cuadriláteros distintos. Encontralos y nombralos.



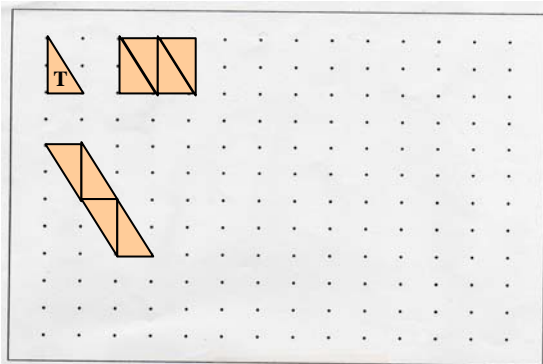
*Por lo general estos dos son los que más tardan en aparecer y los que los descubren ponen semejante cara de satisfacción que da gusto verlo.*

- En un geoplano de 4x4 representá el polígono con la mayor cantidad de lados posibles.

Después de un buen tiempo y muchos intentos alguno de los alumnos encuentra que ese polígono tiene 16 lados.



- En un geoplano de 4x4 representá todos los paralelogramos (u otra figura) de distinta medida que encuentres.
- En un geoplano de 4x4 representá el menor y el mayor trapecio isósceles (u otra figura) que encuentres.
- En un geoplano de 4x4 representá todos los paralelogramos (u otra figura) de distinta medida que encuentres.
- ¿Cuántos cuadrados es posible dibujar en un geoplano de 3x3 (o de 4x4 y si se da podemos llegar a nxn)?



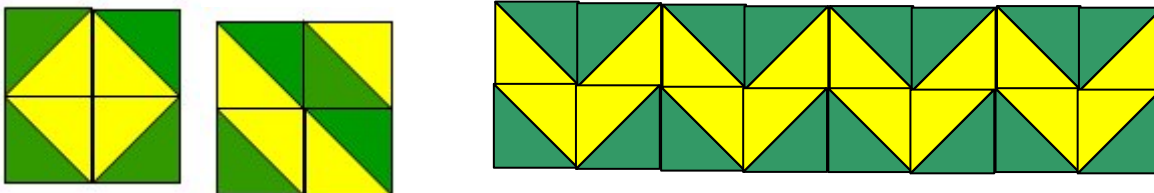
- Encontrá la mayor cantidad de polígonos convexos de distinta forma o de distinta medida que pueden obtenerse a partir de 4T. Nombralos a medida que van apareciendo. (Hay más de 10)

### ► Computadora

- Sin conexión a Internet:



- Usando Autorformas de Word dibujamos este mosaico básico y luego lo vamos copiando, trasladando, rotando, agrupando, etc., para generar distintos diseños.

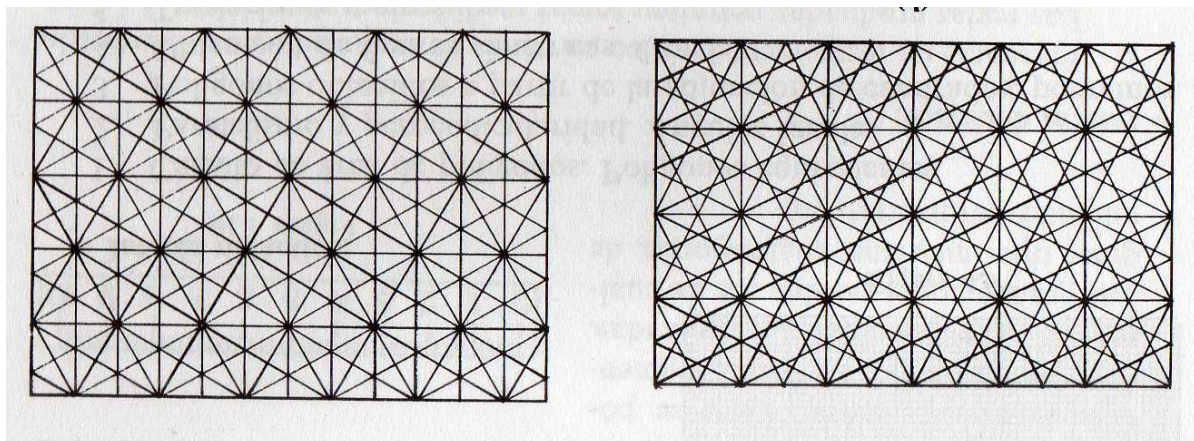


- Usando graphmática (que previamente lo bajo de Internet) imprimimos pares de ejes cartesianos con distintas escalas, que luego utilizamos para otras actividades, por ejemplo, rotaciones, traslaciones, simetrías, composiciones); también utilizamos este programa para analizar características de la función lineal a partir de variar parámetros, analizar los gráficos y sacar conclusiones.
- Usando el programa CABRI, construimos cuadriláteros en función de la definición de ese cuadrilátero y luego analizamos otras propiedades. También con este programa realizamos

alguna construcción que requiere mayor precisión que la que se logra con regla y compás, por ejemplo la recta de Euler, la circunferencia que pasa por tres puntos, o los dibujos que nos permiten responder a preguntas del tipo: ¿qué figura tiene sus vértices en los puntos medios de los lados de un paralelogramo?

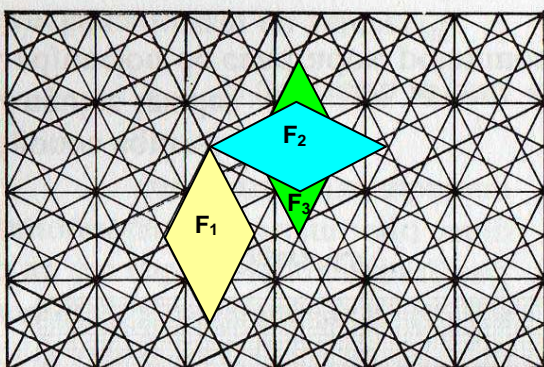
- Con conexión a Internet:
- Bajamos problemas de la Olimpiada de Matemática Ñandú y Mateclubes. ([www.oma.org.ar](http://www.oma.org.ar))
- Mandamos consultas al correo de la O.M.A., por ejemplo ¿A alguien se le ocurre, o conoce, un ejemplo de poliedro cóncavo que no cumpla con la relación de Euler:  $C + V - A = 2$ .
- A veces jugamos juegos de Ingenio, o Sudoku, que bajamos de [www.sectormatematica.cl](http://www.sectormatematica.cl)

### ► Papeles reticulados



Pueden ser desde el mismo papel cuadrículado que usamos para la carpeta, hasta diseños más complicados como los de arriba. Permiten trabajar actividades que combinan conceptos geométricos con otras habilidades, que hacen que los alumnos se sientan desafiados y motivados a intervenir. Por ejemplo:

- Sin agregar más segmentos que los que ya contiene la hoja ubicá polígonos de distinta clase (podemos limitar a  $n \leq 8$ , con  $n =$  número de lados), que encuentres.
- Sin agregar más segmentos que los que ya contiene la hoja ubicá todos los paralelogramos (u otra figura) de distinta medida que encuentres.



- Reproducí una parte (yo indico cuál) de la hoja con tal medida (también yo indico cuál).
- Encontrar figuras que se obtienen por simetría, o rotación, o traslación de otras, o por la composición de movimientos.
- ¿Qué movimientos transforman a ...

...F <sub>1</sub> en F <sub>2</sub> ?	...F <sub>1</sub> en F <sub>3</sub> ?	...F <sub>2</sub> en F <sub>3</sub> ?
---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

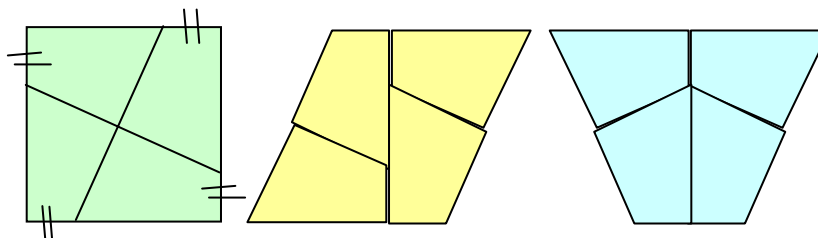
- Se pueden usar también para diseñar distintos mosaicos.

► **Tacos de papel de color (9x9 cm)**

Es un material económico (el taco tiene 400 hojas), hay que buscar una marca de buena calidad para que sean realmente cuadrados. Con ellos se puede proponer, por ejemplo:

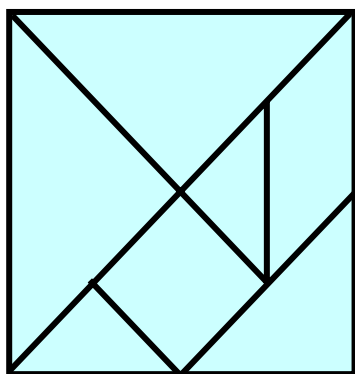
- Rompecabezas geométricos:

Cortar tres hojitas de papel de distinto color como se indica en la figura verde, los segmentos señalados deben tener la misma medida. Luego con uno de ellos volver a armar el cuadrado original y con los otros armar otros cuadriláteros. (que son el paralelogramo y el trapecio isósceles). Calculá el perímetro y la superficie de cada figura. (Si se dan cuenta antes de que las superficie debe ser la misma para las tres figuras mejor, y sino hacer el análisis luego de tener los resultados).



- Tangramas:

Siguiendo las indicaciones (en las indicaciones que voy dando aprovecho para introducir vocabulario geométrico, diagonales, ejes de simetría, punto medio, pregunto sobre el nombre de las figuras que se van obteniendo) cada alumno recorta su propio tangram. Luego podemos usarlo para armar los clásicos tangramas o, por ejemplo:



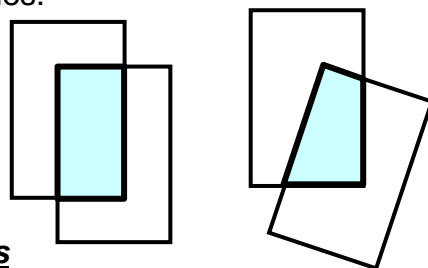
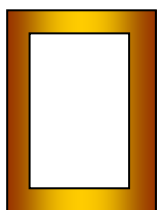
- Volver a armar el cuadrado original.
- Suponemos que el tangram está hecho en una pieza de madera que costó \$ 40, ¿cuál debería ser el precio de cada una de las partes en que quedó dividido?
- ¿Qué fracción del cuadrado original representa tal parte?
- ¿Qué % del cuadrado original representa tal parte?

- Armá un cuadrado con dos partes, con tres y con cuatro.
- Armá un rectángulo con tres partes, con cuatro partes.
- Estas hojitas también son adecuadas para hacer **Origami**, es decir obtener figuras plegando papel de acuerdo a las instrucciones que se pueden dar en forma verbal, o

siguiendo los pasos como hace el profesor, o mirando las indicaciones impresas. Hay que recomendar prolijidad y la mayor precisión en los pliegues.

► **Papel misionero** (grosso, o sino cartón o celuloide tipo radiografía)

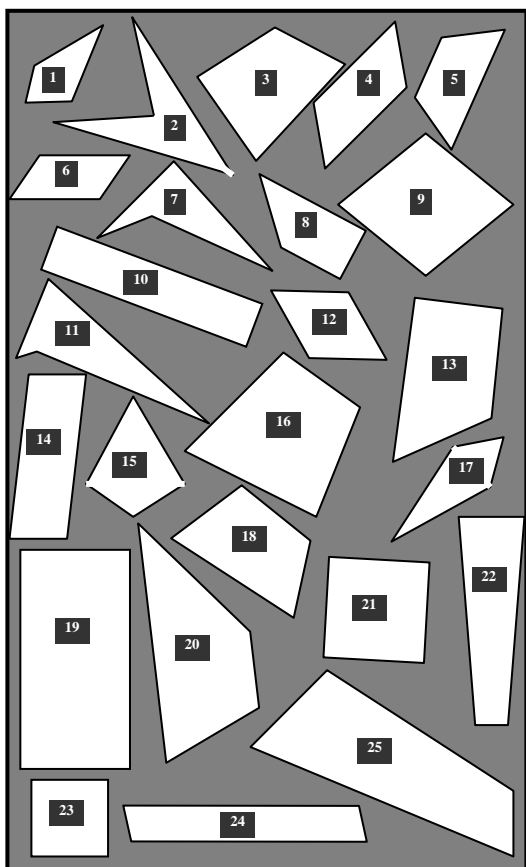
En cualquiera de esos materiales recortar un trozo rectangular de 10x12 cm, aproximadamente y dentro de este recortar (con trincheta, pueden hacerlo los alumnos o llevar unos cuantos hechos por el profesor) un rectángulo de 4x7 cm (u otro medida, pero no muy pequeño). Luego usar ese marco para dibujar rectángulos superpuestos de tal manera que se vayan generando distintos polígonos, reconocerlos, nombrarlos, analizar distintas posibilidades.



► **Plantillas**

**con figuras**

Con una fotocopia con figuras como esta pueden proponerse distintas actividades, por ejemplo:



- Entrego una hoja como esta por grupo de alumnos y le digo toda la clase que elegí una figura, ellos deben deducir cuál es, a partir de las respuestas que yo doy a las preguntas que ellos hagan, cualquier pregunta es válida excepto preguntar por el número de la figura.
- Nombrar las figuras.
- Completá el cuadro ubicando cada figura en el casillero correspondiente:

No tiene lados //	Tiene un solo par de lados //	Tiene dos pares de lados //

## **(6) Bibliografía**

- Parra, Cecilia y Saiz, Irma (Comps.)(1994): “**Didáctica de Matemáticas - Aportes y reflexiones**”. Cap.III. Edit. Paidós. Buenos Aires.
- Bressan, Ana María y otras (2000): **Razones para enseñar geometría en la E.G.B.** Edic. Novedades Educativas. Buenos Aires.
- Godino, Juan D. y otro (2003): **Geometría y su didáctica para maestros.** Proyecto Edumat. Univ. De Granada.
- Alsina, Claudi y otros (1991): **MATERIALES PARA CONSTRUIR LA GEOMETRÍA.** Edit. Síntesis. España.