TECNOLOGÍA Y MODELOS MATEMÁTICOS EN EL AULA

Lic. Fabián Valiño
Instituto Superior de Educación
Dr. Joaquín V. González

Resumen

En el contexto de este artículo, la modelización en matemáticas es considerada como un problema práctico generado o establecido generalmente en el mundo real, cuya resolución requiere de algunas técnicas elementales relacionadas con modelos matemáticos. Desde este punto de vista, se explorará en este taller una metodología basada en la tecnología conducente a la construcción del concepto de probabilidad simple, de los principios fundamentales de probabilidad, del uso de números aleatorios para simular experimentos aleatorios y de modelos específicos de la teoría de probabilidades (la distribución binomial y la distribución de Poisson).

INTRODUCCIÓN

Para muchos autores (Houston y otros, 1995), la modelización es un deber en cualquier curso moderno de matemáticas. Un modelo matemático es una representación simplificada de un aspecto de la realidad que incluye alguna entidad matemática, como puede ser por ejemplo una ecuación diferencial, una distribución de probabilidad, etc., conjuntamente con una serie de presunciones relativas a las simplificaciones de la realidad realizadas. Los modelos pueden ser utilizados para describir y predecir y son útiles en la medida de su validez. La modelización matemática es la actividad consistente en la creación o la modificación de un modelo y su utilización. Esta utilización permitirá responder algunas cuestiones matemáticas que surjan durante el proceso de modelización.

Estos autores coinciden en que es dificultoso que el alumno pueda crear un modelo matemático por sí mismo por lo que se hace necesario que:

- El docente explique previamente en qué se basa el modelo matemático que se presenta, su utilidad, sus puntos débiles, etc.,

- Un conjunto de modelos matemáticos hayan sido discutidos en clases anteriores por un profesor o por un grupo de profesores de materias afines (ejemplo el profesor de Física conjuntamente con el profesor de Matemáticas).
- Los modelos presentados por el profesor y que deben ser valorados a posteriori, no disten demasiado de los previamente analizados. Esto significa que los alumnos puedan transferir sus construcciones anteriores en la interpretación y utilización del modelo matemático presentado, mostrando así las competencias adquiridas en esta metodología de trabajo.

Los contenidos relativos al estudio de modelos permiten establecer las bases de un posterior estudio estadístico con mayor profundidad en lo que a significación se refiere. Así se habla de la inferencia estadística y la obtención de conclusiones relativas a las características de una población a partir de los datos de una muestra obtenida de la misma. La interrelación de los modelos probabilísticos y estadísticos queda plasmada en estos casos, pues puede verse que en ellos se realizan análisis estadísticos de los datos de las muestras y las conclusiones se expresan en términos de probabilidad. Cuando se trabaja con los alumnos la modelización en aleatoriedad se debe apreciar que se les está proponiendo un modelo que puede ser aplicable o no a una situación aleatoria cualquiera y no una simple colección de fórmulas y técnicas preestablecidas.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD A PARTIR DE MODELOS Y MATERIAL CONCRETO

La primera actividad de modelización propuesta para integrar el portafolios tiene por finalidad que el alumno pueda construir el concepto de probabilidad de un suceso a partir de la frecuencia relativa de ese suceso a medida que el número de experimentaciones se hace mayor.

Algunos libros de texto apelan para la construcción de este concepto al lanzamiento de un dado o una moneda. La frecuencia relativa del número de caras o el número de ases en el dado tiende a estabilizarse hacia su valor de probabilidad a medida que aumenta el número de repeticiones del suceso.

> *"Observemos el proceso aleatorio <arrojar una moneda> y analicemos la frecuencia relativa de los resultados: en 50 lanzamientos, nuestro evento de interés será <que salga cara>…La gráfica expone cómo está variando la*

frecuencia relativa del evento a medida que aumenta el número de observaciones." (Castillo Padilla y otros., 1998: 79).

"Las distribuciones empíricas son, cada vez, más próximas a la distribución esperada cuanto mayor sea el número de lanzamientos del dado. Y llega a ser casi idéntica si el número de lanzamientos es muy grande". (Guzmán, *et. al.*, 1998: 230).

La mayoría de los alumnos, aún antes de tratarse el contenido de las probabilidades, tienen un conocimiento intuitivo de esas probabilidades simples. Expresada de modos distintos, las afirmaciones permiten inferir que existe una aproximación intuitiva de este concepto:

- *"Hay una chance en dos de que salga cara"*.
- *"Puede salir tanto cara como ceca, los dos tienen la misma posibilidad"*.
- *"Las posibilidades de cara son de una en dos"*.
- *"Es la mitad"*.

Razonamientos similares se obtienen a partir del lanzamiento de un dado con respecto a la salida de una de sus caras. Es decir, pareciera que al realizar la experiencia de lanzar una moneda varias veces para hacer notar que las frecuencias relativas de la salida de cara o de ceca se aproximan a medida que aumenta el número de repeticiones del suceso "lanzar una moneda y observar la figura visible" ya es un hecho conocido por el alumno independientemente de la realización de la experiencia.

Esta modalidad de actividad pareciera confirmar lo que el alumno ya conoce intuitivamente. Se distinguirá entonces la construcción del concepto de probabilidad según una modalidad *confirmatoria* o una modalidad *predictiva* (Valiño, 2002). La modalidad confirmatoria es la que se acaba de caracterizar mientras que la modalidad predictiva es la que se propondrá como actividad.

Para realizar esta tarea los alumnos deben contar material concreto especial que consiste en un conjunto de bolsas iguales realizadas en tela opaca (de modo tal que no pueda observarse el contenido de la bolsa al trasluz) conteniendo un número determinado de canicas, fichas, etc.

Las canicas deben ser indistinguibles al tacto para asegurar la equiprobabilidad de extracción de las mismas. Las bolsas se preparan de modo tal que contengan cada una el mismo número con la correspondiente proporción de colores elegidos; estas canicas constituirán la ***población*** sobre la que se efectuará el cálculo de frecuencias relativas. Así, por ejemplo, si la población es de diez : cinco transparentes, dos celestes y tres blancas, cada bolsa deberá tener exactamente el mismo contenido que las restantes. Estas condiciones garantizan la equiprobabilidad de elegir cualquiera de las bolsas.

Los alumnos trabajarán en grupos de tres con determinados roles asignados que cumplirán según su propia organización: uno de los alumnos será el encargado de obtener la ***muestra***, es decir, realizar la extracciones (de a una y con reposición) de canicas de la bolsa y volver a incorporarlas para mezclar su contenido, otro alumno registrará el color de la bolita obtenido en cada extracción hasta llegar a cumplimentar el ***tamaño de la muestra*** y comunicará al tercer alumno los resultados obtenidos para cada color anotado en la muestra; finalmente, el tercer alumno del grupo realizará los cálculos de frecuencia relativa correspondiente a cada uno de los colores obtenidos en la muestra, ***acumulando*** frecuencias en cada nueva muestra registrada.

Los alumnos seleccionarán aleatoriamente el ***tamaño de la muestra*** y deberán diseñar una planilla de forma tal que puedan exhibir los resultados obtenidos durante el proceso de experimentación.

El equipo entonces elige una de las bolsas pudiendo palpar su contenido pero no mirar en su interior para determinarlo, incluso pueden contar el número de elementos que contiene lo que constituirá la población en cuestión. Así ya están en condiciones de comenzar con el proceso de experimentación.

Supongamos que un equipo determinado elige 7 como tamaño de la muestra, llevan a cabo el experimento dos veces y registran los siguientes resultados:

- ✓ <u>Primera muestra</u>: celeste , transparente, transparente, celeste, transparente, transparente, transparente.
- ✓ <u>Segunda muestra</u>: blanca, transparente, transparente, celeste, blanca, blanca, celeste.

Un posible diseño de planilla puede ser el que se muestra a continuación en la figura 1:

Muestra Nro.	**MUESTRA**	**COLOR...**CELESTE.....		**COLOR..**TRANSPARENTE..	
		FREC.ABS.	**FREC. REL.**	**FREC. ABS.**	**FREC.REL.**
1	C, T,T,C,T,T,T	2	$\frac{2}{7} \cong 0{,}286$	5	$\frac{5}{7} \cong 0{,}714$

FIGURA 1. Posible diseño de planilla para la actividad propuesta

Como en la segunda muestra aparece un nuevo color, es necesario ampliar la planilla. El diseño podría aparecer tal como se muestra en la figura 2:

Muestra Nro.	MUESTRA	COLOR CELESTE		COLOR TRANSPARENTEE		COLOR BLANCO	
		FREC.ABS-	FREC.REL	FREC.ABS.	FREC.REL	FREC.ABS	FREC.RE
1	C,T,T,C,T,T,T	2	0,285…	5	0,714…		
2	B,T,T,C,B,B,C	4	0,2857…	7	0,5	3	0,214…
...							

FIGURA 2. Posible diseño de planilla para la actividad.

Cada equipo obtiene entonces un número determinado de registros y calcula una frecuencia relativa para cada uno de los colores muestreados y formulan alguna hipótesis acerca del número de bolitas de cada color que forma la población.

Los alumnos observan algunas disparidades de resultados entre las frecuencias relativas obtenidas por cada uno de los equipos aunque pareciera que aquellos equipos que consideraron muestras de mayor número o que repitieron más veces su experiencia pueden hacer alguna predicción acerca de los colores de las canicas que componen la población.

Durante la situación de acción, pueden aparecer algunos interrogantes en relación a la elección del tamaño de la muestra. Independientemente de la elección de este número se garantiza la validez del experimento en función de la acumulación final de frecuencias absolutas con el correspondiente cálculo de frecuencias relativas. Sin embargo, y a los fines operatorios puede ser práctico elegir diez como tamaño de la muestra dado que facilita las divisiones para el cálculo de las frecuencias relativas.

PROFESOR…¿QUÉ SIGNIFICA LA TECLA RAN DE LA CALCULADORA?

La tecla Ran de la calculadora ofrece innumerables posibilidades para simular experimentos aleatorios. Recordemos que una calculadora (aún las científicas simples) dan números aleatorios de la forma:

$$0 \leq ran < 1$$

Es decir un número decimal (en general con tres cifras decimales), con parte entera 0. Si deseamos emplear estos números para simular la tirada de un dado común necesitamos obtener números del 1 al 6 inclusive. Si multiplicamos entonces por 6 miembro a miembro de las desigualdades obtenemos:

$$0 \leq 6.ran < 6$$

Aplicando parte entera y sumando 1 en los miembros de la desigualdad obtenemos:

$$[0]+1 \quad \leq [6.ran]+1 < [5{,}994]+1$$ [1]

Se logran así números comprendidos entre 1 y 6.

NÚMEROS ALEATORIOS PARA MODELIZAR FUNCIONES

El cálculo de la pérdida de carbono 14 en los organismos muertos se utiliza para datar a los fósiles. Las plantas vivas asimilan el carbono del CO_2 atmosférico durante la fotosíntesis y lo expulsan durante la respiración. De esta forma, los tejidos de las plantas vivas —y los de los animales vivos (humanos incluidos) que se alimentan de esas plantas— continuamente están intercambiando carbono 14 con la atmósfera. Esto hace que la razón entre el carbono 14 y el carbono 12 del carbono contenido en los tejidos orgánicos de los seres vivos es semejante a la del CO_2 de la atmósfera. Ahora bien, en cuanto los organismos vegetales o animales

[1] El resultado 5,994 ó 5,9994 dependerá del modelo de la calculadora. Recordemos que el mayor número de tres cifras decimales será 0,999 o bien 0,9999.

mueren, cesa el intercambio con la atmósfera y cesa el reemplazo del carbono de sus tejidos. Desde ese momento el porcentaje de carbono 14 de la materia orgánica muerta comienza a disminuir, ya que se transmuta en nitrógeno 14 y no es reemplazado. Sabiendo la diferencia entre la proporción de carbono 14 que debería contener un fósil si aún estuviese vivo (semejante a la de la atmósfera en el momento en el que murió) y la que realmente contiene, se puede conocer la fecha de su muerte.

La cantidad y el porcentaje de carbono 14 se calculan midiendo las emisiones de partículas ß de la muestra. El método sólo es viable para fósiles no muy viejos, menores de unos 60.000 años, ya que para edades superiores las emisiones de partículas ß son ya demasiado poco intensas y difíciles de medir, por lo que los errores pueden ser muy grandes.

Este fenómeno natural puede modelizarse mediante el empleo de números aleatorios. Supongamos que simulamos la tirada de 216 dados. En esa tirada quitamos todos los dados en que aparece un 6 en la cara superior. Tomamos los dados restantes y volvemos a arrojarlos, quitamos todos aquellos en los que aparece un 6 en la cara superior. Repetimos este proceso hasta que quede un solo dado. Esta tarea puede simularse mediante el empleo de Excel: la siguiente planilla muestra los resultados de arrojar un dado 240 veces mediante números aleatorios.

6	4	1	3	3	3	6	6	4	4	2	3
2	1	5	3	3	2	6	5	3	2	1	1
3	6	6	5	2	3	6	3	1	1	1	1
6	3	6	3	1	4	6	3	4	3	5	5
3	4	6	4	6	4	2	4	3	2	6	3
5	6	2	4	5	2	4	3	4	6	1	2
1	5	3	4	6	2	1	2	5	1	2	2
1	6	5	2	6	2	3	4	1	3	6	2
3	4	6	4	1	1	1	2	2	4	2	2
4	5	5	1	1	3	6	5	6	4	1	5
4	4	5	3	3	1	6	4	1	1	3	4
2	3	3	5	1	6	3	5	6	2	1	4
6	2	5	2	2	5	6	4	6	6	3	5
1	6	3	2	1	4	5	6	2	6	4	5
2	2	3	3	3	5	3	2	5	6	3	3
2	2	1	5	3	5	2	2	2	2	3	6
3	2	1	3	2	1	4	3	3	4	5	1
5	3	4	6	6	2	2	3	3	4	4	6
1	5	2	4	1	1	1	3	2	3	3	3
3	2	6	1	4	2	3	4	3	1	1	3

Observamos que el número 6 apareció 38 veces de las 240 simulaciones. A continuación “apartamos” esos dados en los que salieron 6 y volvemos a arrojar los (240 -38) dados restantes.

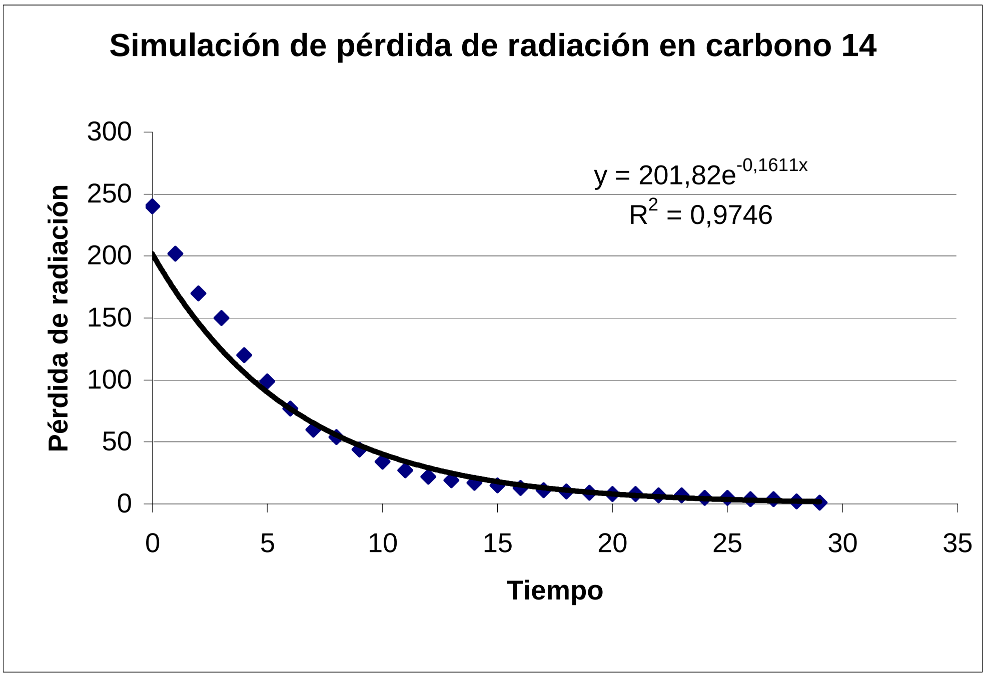
3	6	4	4	2	6	2	2	5	6	6	5
6	5	4	3	4	4	1	2	4	4	2	2
1	4	3	5	2	2	1	6	4	1	6	6
3	2	1	3	1	6	6	4	1	3	2	1
4	5	2	5	2	5	2	5	3	1	1	6
6	4	3	6	5	3	4	1	6	2	4	5
4	4	1	2	4	4	3	5	1	6	2	3
1	2	4	1	4	6	5	4	4	6	1	3
4	4	4	6	5	2	2	1	6	1	3	5
1	1	5	5	3	6	4	6	2	1	4	3
5	1	1	5	6	2	2	1	1	4	4	3
3	2	6	3	3	3	4	3	6	5	4	2
6	3	4	6	6	4	2	1	5	2	3	2
6	5	1	3	4	1	6	3	2	2	6	2
6	3	5	5	1	5	6	3	1	2	1	5
4	3	2	2	3	1	3	5	4	3	1	2
4	2										

Observamos que 32 de las 202 veces volvieron a salir dados con 6. Apartamos estos 32 dados y volvemos a arrojar lo (202 – 32) dados restantes. Esta experiencia se repite hasta que no aparezcan dados con 6. Formamos una tabla de valores con los resultados obtenidos:

Experimento	**Dados**
0	240
1	202
2	170
3	150
4	120
5	99
6	77
7	60
8	54
9	44
10	34
11	27
12	22
13	19
14	17
15	15
16	13
17	11
18	10

19	9
20	8
21	8
22	7
23	7
24	5
25	5
26	4
27	4
28	2
29	1

El gráfico de la pérdida de radiación simulado en el experimento con números aleatorios es:



La función exponencial de ajuste a los datos es la que aparece inserta en el gráfico.

LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON Y LOS NÚMEROS ALEATORIOS

También la distribución de Poisson puede simularse mediante números aleatorios. En efecto, supongamos que arrojamos 64 confites de colores sobre un tablero de ajedrez. En cada una de las casillas podrán quedar, 0, 1, 2, 3, etc., confites. Suponemos que el experimento se realiza en condiciones ideales y que un confite cae sí o sí en una casilla. Al simular el experimento obtenemos:

33	7	51	28	48	13	24	28
48	30	64	49	46	16	12	63
50	28	20	16	5	43	55	9

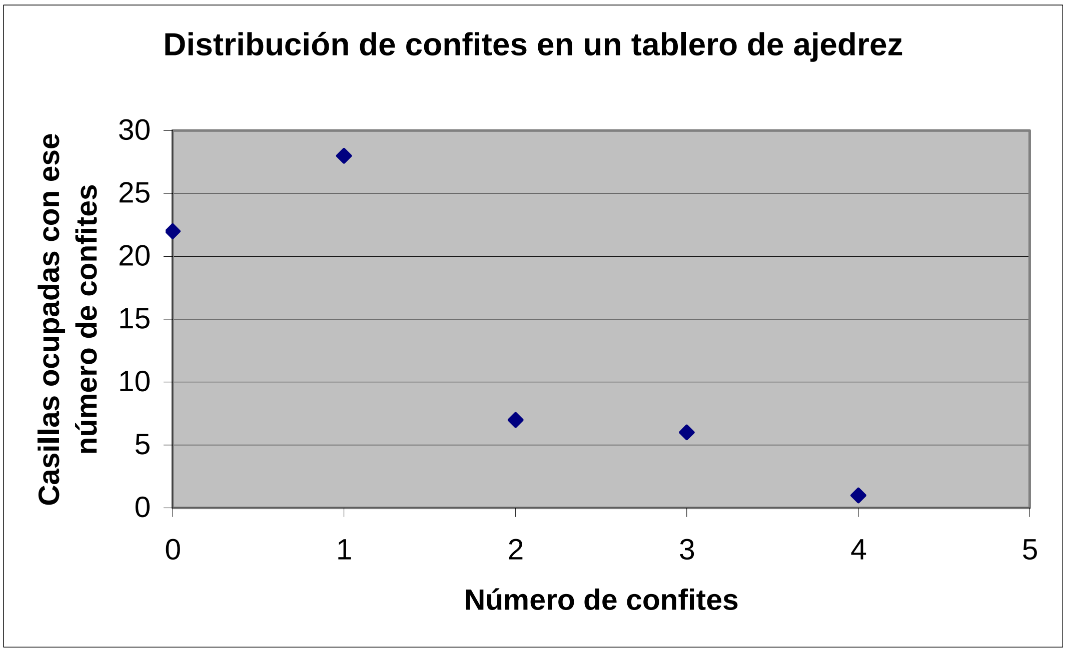
38	53	4	53	14	23	33	33
63	36	19	60	26	58	48	40
21	24	23	30	31	38	18	30
36	3	18	29	47	45	38	10
3	49	63	3	15	33	27	41

Esto significa por ejemplo que en la casilla 3 del tablero de ajedrez cayó un confite, que en la casilla 1 no cayó ninguno, que en la casilla 33, por ejemplo, cayeron 4 confites y así con todas las casillas. Obtenemos el siguiente cuadro de resultados:

Casilla	Confites	Casilla	Confites	Casilla	Confites	Casilla	Confites
1	0	2	0	3	3	4	1
5	1	6	0	7	1	8	0
9	1	10	1	11	0	12	1
13	1	14	1	15	1	16	2
17	0	18	2	19	1	20	1
21	1	22	0	23	2	24	2
25	0	26	1	27	1	28	3
29	1	30	3	31	1	32	0
33	4	34	0	35	0	36	2
37	0	38	3	39	0	40	1
41	1	42	0	43	1	44	0
45	1	46	1	47	1	48	3
49	2	50	1	51	1	52	0
53	2	54	0	55	1	56	0
57	0	58	1	59	0	60	1
61	0	62	0	63	3	64	1

En resumen, se observa lo siguiente:

Nro. de confites	**Casillas**
0	22
1	28
2	7
3	6
4	1



Una distribución de Poisson está caracterizada por su parámetro λ que representa además de su varianza, la esperanza matemática del número de confites esperados por casillero. Dado que $\lambda = np = 64.\frac{1}{64} = 1$, la distribución de probabilidades según el modelo de Poisson queda caracterizada por:

$$P(x = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!} \qquad k=0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Dado que $\lambda = 1$ entonces nos queda $P(x = k) = \frac{e^{-1}.1^k}{k!}$

Construimos una tabla de valores para k y obtenemos:

k=	**P(x =k)**	**Frecuencia esperada**	**Frecuencia observada**	$\lvert Diferencia \rvert$
0	0.3679	23,5	22	1,5
1	0.3679	23,5	28	4,5
2	0.1839	11,8	7	4,8
3	0.0613	3,9	6	2,1
4	0.0153	1,0	1	0

Notamos que la diferencia entre los valores esperados y los observados son bastante dispares: la media de las diferencias es 2,58. Simulemos nuevamente el experimento “arrojando ahora 150 confites, es decir, simulando la caída en los 64 casilleros”.

Casillero	Primeros 150 lanzamientos
1	4
2	5
3	3
4	4
5	1
6	1
7	0
8	3
9	2
10	3
11	2
12	6
13	1
14	1
15	3
16	1
17	2
18	1
19	3
20	3
21	2
22	1
23	1
24	4
25	4
26	0
27	4
28	1
29	5
30	5
31	5
32	2
33	4
34	3
35	2
36	2
37	0
38	4
39	2
40	3
41	1
42	4
43	2
44	1
45	1
46	2
47	1
48	1
49	0
50	1
51	5
52	4
53	1
54	2
55	1
56	2
57	0
58	2
59	3
60	2
61	3
62	2
63	2
64	4

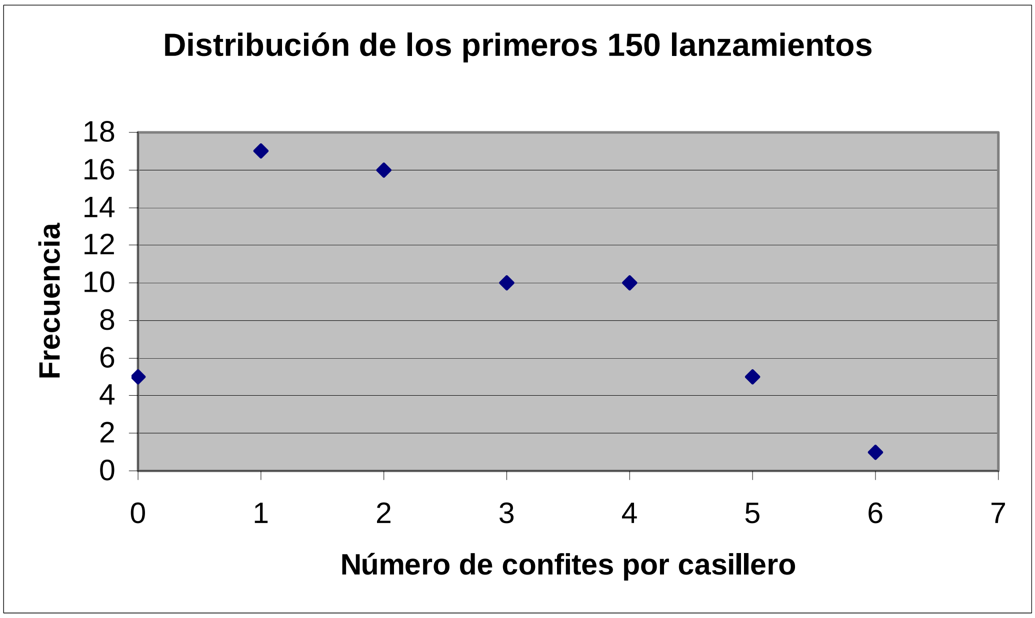
Tabla para los 150 lanzamientos

X	Número de casilleros
0	5
1	17
2	16
3	10
4	10
5	5
6	1

Aquí obtenemos una esperanza matemática de 2,34 con tres cifras significativas y una varianza de 2,19. Consideremos entonces $\lambda = 2{,}34$ y construimos la tabla de probabilidades:

X	P(X=k)= $\frac{e^{-2,.34}.2{,}34^{k}}{k!}$	Frecuencia esperada	Frecuencia observada	$\lvert Diferencia \rvert$
0	0,0963	6,2	5	1,2
1	0,225	14,4	17	2,6
2	0,264	16,9	16	0,9
3	0,206	13,1	10	3,1
4	0,120	7,7	10	2,3
5	0,05630	3,6	5	1,4
6	0,0219	1,4	1	0,4

La media de las diferencias es ahora de 1,7.



A medida que repetimos el experimento (recordamos que la característica de la distribución de Poisson es que la varianza coincide con su esperanza pero que además, la probabilidad tiende a 0 cuando el número de ensayos tiende a infinito.

Cabe ahora realizar un estudio posterior acerca de las fortalezas y debilidades del modelo. La manera más adecuada de estudiar la bondad del ajuste es someter el conjunto de datos a una prueba de chi-cuadrado que permita analizar la distancia entre las frecuencias observadas y esperadas en el modelo.

CONCLUSIONES

Lejos de haber agotado todas las posibilidades de trabajo con los números aleatorios y sus implicancias todavía queda un universo de contenidos matemáticos por explorar en el cual los números aleatorios pueden ser actores principales. Una mera calculadora gráfica o una planilla de cálculo de Excel son útiles en el momento de realizar este tipo de investigaciones y de hecho, algunos temas como aplicaciones de funciones a modelización, adquieren una significación particular en este contexto.

Queda entonces nada más que experimentar este abanico de posibilidades y replanificar las metodologías de trabajo con estos contenidos en el aula.

BIBLIOGRAFÍA

- BENNETT, D.; *Randomness*. Boston, First Harvard University Press paperback edition, 1999.
- CASTILLO PADILLA, J.; GÓMEZ ARIAS, J.; *Estadística inferencial básica.* México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1998.
- GUZMAN, M. y otros; *Matemáticas. Bachillerato I.* Madrid, Anaya, 1988.
- HOUSTON,K.; *Modelling is a must* en: http://www.nun.ac.uk/mathskills/newsletters/issue2/guest.nun. 27 de febrero de 200
- VALIÑO, F.; *Tesis de Licenciatura: El portafolio como instrumento de valoración en la matemática del Nivel Polimodal: Una propuesta para los contenidos de aleatoriedad y probabilidades.* San Martín, julio de 2002.
- VALIÑO, F.; *Modelizando en matemática: hacia la construcción del concepto de probabilidad*. Buenos Aires, SOAREM-Boletín de la Sociedad Argentina de Educación Matemática. Nro. de edición 18, año 2003.
- VERGNAUD, G.; *Competencias Matemáticas* en http://fractus.mat.uson.mx/Clases/Problematica992/Glosario.htm 13 de diciembre de 2001.
- WEAVER, W.; *Lady luck*. Mineola, Dover Publications Inc., 1982